CORRIGÉ – CHAPITRE 1

SUITES NUMÉRIQUES

Raisonnement par récurrence

EXERCICE 1 ⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n = 9 \times 2^n + 5 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $9 \times 2^0 + 5 = 9 + 5 = 14 = u_0$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie, autrement dit que $u_k = 9 \times 2^k + 5$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 5 \\ &= 2\left(9 \times 2^k + 5\right) - 5 \qquad \text{d'après } P_k \\ &= 9 \times 2^{k+1} + 10 - 5 \\ &= 9 \times 2^{k+1} + 5 \end{aligned}$$

ce qui prouve P_{k+1}. La propriété est donc héréditaire.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 9 \times 2^n + 5}$$

EXERCICE 2 ⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } 2 \leqslant u_n \leqslant 10 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 10$ et $2 \leqslant 10 \leqslant 10$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $2 \leqslant u_k \leqslant 10$. En ajoutant 5 à chaque membre, puis en appliquant la fonction racine carrée, croissante sur $[0\,;+\infty[$:

$$2 \leqslant u_k \leqslant 10 \implies 7 \leqslant u_k + 5 \leqslant 15 \implies \sqrt{7} \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{15}$$

Or $\sqrt{7} \geqslant \sqrt{4} = 2$ et $\sqrt{15} \leqslant \sqrt{100} = 10$, donc $2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 10$, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant 10}$$

EXERCICE 3 ⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } 0 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $0 \leqslant 2 \leqslant 5$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_k \leqslant 5$. Alors, la fonction racine carrée étant croissante :

$$0 \leqslant u_k \leqslant 5 \implies 15 \leqslant u_k + 15 \leqslant 20 \implies \sqrt{15} \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{20}$$

Or $\sqrt{15} \geqslant 0$ et $\sqrt{20} \leqslant \sqrt{25} = 5$, donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 5}$$

EXERCICE 4 ⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n > 0 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k > 0$. Alors $3u_k > 0$ et $1+2u_k > 1 > 0$: le quotient $u_{k+1} = \dfrac{3u_k}{1+2u_k}$ est bien défini, et c'est un quotient de deux nombres strictement positifs, donc $u_{k+1} > 0$, ce qui prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$$

EXERCICE 5 ⋆

1. On applique la relation de récurrence :

$$u_2 = \frac{1}{2-u_1} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_3 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad ; \quad u_4 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{2}\ ;\ u_3 = \frac{2}{3}\ ;\ u_4 = \frac{3}{4}}$$

2. En écrivant $u_1 = \dfrac{0}{1}$, on constate que le numérateur et le dénominateur augmentent tous deux de 1 à chaque rang, ce qui conduit à conjecturer :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n-1}{n}}$$

3. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P_n : \text{« } u_n = \frac{n-1}{n} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 1$: $\dfrac{1-1}{1} = 0 = u_1$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $u_k = \dfrac{k-1}{k}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2-u_k} = \frac{1}{2-\frac{k-1}{k}} \\ &= \frac{1}{\frac{2k-(k-1)}{k}} = \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{(k+1)-1}{k+1} \end{aligned}$$

ce qui prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence, $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, et en particulier :

$$\boxed{u_{2021} = \frac{2020}{2021}}$$

EXERCICE 6 ⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n \geqslant n \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 0 \geqslant 0$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k \geqslant k$. En multipliant cette inégalité par $3 > 0$, puis en ajoutant $-2k + 3$:

$$\begin{aligned} u_{k+1} = 3u_k - 2k + 3 &\geqslant 3k - 2k + 3 \\ &\geqslant k + 3 \\ &\geqslant k + 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n}$$

EXERCICE 7 ⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } 0 \leqslant v_n < 3 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $v_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 < 3$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant v_k < 3$. Alors :

$$0 \leqslant v_k < 3 \implies -3 < -v_k \leqslant 0 \implies 3 < 6 - v_k \leqslant 6$$

La fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on obtient :

$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{6 - v_k} < \frac{1}{3} \implies \frac{9}{6} \leqslant v_{k+1} < 3$$

Comme $\dfrac{9}{6} \geqslant 0$, on a bien $0 \leqslant v_{k+1} < 3$, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n < 3}$$

EXERCICE 8 ⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n = (n+1)^2 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $(0 + 1)^2 = 1 = u_0$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k = (k + 1)^2$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \qquad \text{d'après } P_k \\ &= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 \\ &= k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 \end{aligned}$$

ce qui prouve P_{k+1}, puisque $k + 2 = (k + 1) + 1$.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. On calcule les premiers termes :

$$u_1 = 1 \times 2 = 2 \quad ; \quad u_2 = 2 + 2 \times 3 = 8 \quad ; \quad u_3 = 8 + 3 \times 4 = 20$$

De plus, u_{n+1} est obtenu en ajoutant à u_n le terme suivant de la somme :

$$\boxed{u_1 = 2 \; ; \; u_2 = 8 \; ; \; u_3 = 20 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + (n+1)(n+2)}$$

2. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n : \text{« } u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 1$: $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2 = u_1$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $u_k = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$. Alors, d'après la relation établie à la question 1. :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

ce qui prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. On calcule les premières sommes :

$$S_1 = 1 \; ; \; S_2 = 1 + 4 = 5 \; ; \; S_3 = 5 + 9 = 14 \; ; \; S_4 = 14 + 16 = 30$$

$$\boxed{S_1 = 1 \; ; \; S_2 = 5 \; ; \; S_3 = 14 \; ; \; S_4 = 30 \qquad \text{et} \qquad S_{n+1} = S_n + (n+1)^2}$$

2. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P_n : \text{« } S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 1$: $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 = S_1$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $S_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Alors :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)\big[k(2k+1) + 6(k+1)\big]}{6} \\ &= \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant en factorisant $2k^2+7k+6=(k+2)(2k+3)$. Comme $2k+3=2(k+1)+1$, ceci prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. On calcule les premières sommes :

$$S_1 = 1\ ;\ S_2 = 1+8 = 9\ ;\ S_3 = 9+27 = 36\ ;\ S_4 = 36+64 = 100$$

$$\boxed{S_1 = 1\ ;\ S_2 = 9\ ;\ S_3 = 36\ ;\ S_4 = 100 \qquad \text{et} \qquad S_{n+1} = S_n + (n+1)^3}$$

2. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P_n : \text{« } S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n=1$: $\dfrac{1\times 4}{4} = 1 = S_1$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $S_k = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$. Alors :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

On remarque au passage que $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$: la somme des cubes est le carré de la somme des entiers.

EXERCICE 12 ⋆

1. La fonction f est une fonction polynôme du second degré, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x :

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad \text{donc} \qquad f'(x) = 2-2x = 2(1-x)$$

Or pour tout $x \in [0\,;1]$, on a $1-x \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$:

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0\,;1]}$$

2. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } 0 < u_n < 1 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n=0$: par hypothèse $u_0 \in\ ]0\,;1[$, donc $0<u_0<1$ et P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $0<u_k<1$. La fonction f étant croissante sur $[0\,;1]$ d'après la question 1., on peut l'appliquer à chaque membre de l'encadrement :

$$0 < u_k < 1 \implies f(0) < f(u_k) < f(1) \implies 0 < u_{k+1} < 1$$

puisque $f(0)=0$ et $f(1) = 1\times 1 = 1$. Ceci prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n = u_n\,(2 - u_n - 1) = u_n(1 - u_n)$$

Or d'après la question 2., $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$, donc ce produit est strictement positif :

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x-2) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{4x + 4 - 4x + 2}{(x+1)^2} = \frac{6}{(x+1)^2}$$

Ce quotient est strictement positif, donc :

$$\boxed{f \text{ est croissante sur }]-1\,;+\infty[}$$

2. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n > 2 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 3 > 2$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k > 2$. Comme $2 > -1$, on peut appliquer la fonction f, croissante sur $]-1\,;+\infty[$:

$$u_k > 2 \implies f(u_k) > f(2) \implies u_{k+1} > \frac{4 \times 2 - 2}{2 + 1} = 2$$

ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2}$$

3. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n : \text{« } u_{n+1} \leqslant u_n \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_1 = \dfrac{4 \times 3 - 2}{3 + 1} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5 \leqslant 3 = u_0$. Donc Q_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{k+1} \leqslant u_k$. Ces deux termes appartenant à $]-1\,;+\infty[$ d'après la question 2., on applique la fonction f, croissante :

$$u_{k+1} \leqslant u_k \implies f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \implies u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

ce qui prouve Q_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence, $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n :

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

EXERCICE 14 ⋆

1. Démontrons par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$: « 3 divise $4^n + 5$ ».
Initialisation : Pour $n = 0$: $4^0 + 5 = 6 = 3 \times 2$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $4^k + 5 = 3m$, autrement dit $4^k = 3m - 5$. Alors :

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 5 &= 4 \times 4^k + 5 \\ &= 4(3m - 5) + 5 \\ &= 12m - 15 = 3(4m - 5) \end{aligned}$$

et $4m - 5$ est un entier, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n + 5 \text{ est un multiple de } 3}$

2. Démontrons par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$: « 8 divise $3^{2n}-1$ ».
Initialisation : Pour $n=0$: $3^0-1=0=8\times 0$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $3^{2k}-1=8m$, autrement dit $3^{2k}=8m+1$. Alors :

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)}-1 &= 3^{2k+2}-1 = 9\times 3^{2k}-1\\ &= 9(8m+1)-1\\ &= 72m+8 = 8(9m+1)\end{aligned}$$

et $9m+1$ est un entier, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 3^{2n}-1 \text{ est un multiple de } 8}$

3. Démontrons par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$: « 7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$ ».
Initialisation : Pour $n=0$: $3^1+2^2=3+4=7=7\times 1$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $3^{2k+1}+2^{k+2}=7m$, autrement dit $3^{2k+1}=7m-2^{k+2}$. Alors :

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+2} &= 9\times 3^{2k+1}+2\times 2^{k+2}\\ &= 9\left(7m-2^{k+2}\right)+2\times 2^{k+2}\\ &= 63m-7\times 2^{k+2}\\ &= 7\left(9m-2^{k+2}\right)\end{aligned}$$

et $9m-2^{k+2}$ est un entier, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 3^{2n+1}+2^{n+2} \text{ est un multiple de } 7}$

4. Démontrons par récurrence la propriété : $\forall n \geqslant 1,\ P_n$: « 3 divise n^3+2n ».
Initialisation : Pour $n=1$: $1+2=3=3\times 1$. Donc P_1 est vraie.
Hérédité : Soit $k\geqslant 1$. Supposons qu'il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $k^3+2k=3m$. Alors :

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\ &= \left(k^3+2k\right)+3k^2+3k+3\\ &= 3m+3\left(k^2+k+1\right)\\ &= 3\left(m+k^2+k+1\right)\end{aligned}$$

et $m+k^2+k+1$ est un entier, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n\geqslant 1,\ n^3+2n \text{ est un multiple de } 3}$

EXERCICE 15 - TYPE BAC ⋆⋆

1. On applique la relation de récurrence :

$$u_0=2\ ;\ u_1=\frac{7}{3}\approx 2{,}33\ ;\ u_2=\frac{26}{9}\approx 2{,}89\ ;\ u_3=\frac{97}{27}\approx 3{,}59\ ;\ u_4=\frac{356}{81}\approx 4{,}40$$

$\boxed{\text{On conjecture que la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$

2. (a) Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P_n : \text{« } u_n\leqslant n+3 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n=0$: $u_0=2\leqslant 3$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons que $u_k\leqslant k+3$. En multipliant par $\frac{2}{3}>0$ puis en ajoutant $\frac{1}{3}k+1$:

$$\begin{aligned}u_{k+1}=\frac{2}{3}u_k+\frac{1}{3}k+1 &\leqslant \frac{2}{3}(k+3)+\frac{1}{3}k+1\\ &\leqslant \frac{2}{3}k+2+\frac{1}{3}k+1\\ &\leqslant k+3\leqslant (k+1)+3\end{aligned}$$

ce qui prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n+3}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \\ &= \frac{1}{3}(n + 3 - u_n) \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente $u_n \leqslant n+3$, donc $n+3-u_n \geqslant 0$ et ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$:

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 \\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n \\ &= \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$. On en déduit que $v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis que $u_n = v_n + n$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n}$$

EXERCICE 16 - PYTHON ⋆⋆

1. (a) On applique la relation de récurrence :

$$u_1 = \left(1 + \frac{2}{1}\right) \times 5 + \frac{6}{1} = 15 + 6 = 21$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{2}{2}\right) \times 21 + \frac{6}{2} = 42 + 3 = 45 \quad ; \quad u_3 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \times 45 + \frac{6}{3} = 75 + 2 = 77$$

$$\boxed{u_1 = 21\ ;\ u_2 = 45\ ;\ u_3 = 77}$$

(b) On peut proposer la fonction suivante :

```
def p(n):
    u = 5
    for k in range(n):
        w = (1 + 2/(k+1))*u + 6/(k+1)    # w vaut u(k+1)
        print("d", k, "=", w - u)        # terme d(k)
        print("u", k+1, "=", w)          # terme u(k+1)
        u = w
```

(c) En poursuivant les calculs, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	5	21	45	77	117	165	221
d_n	16	24	32	40	48	56	64

Les termes de (d_n) augmentent de 8 à chaque rang :

$$\boxed{\text{On conjecture que } (d_n) \text{ est arithmétique de raison } 8}$$

2. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n = 4n^2 + 12n + 5 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $4 \times 0 + 12 \times 0 + 5 = 5 = u_0$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k = 4k^2 + 12k + 5$. Alors, en réduisant au même dénominateur $k + 1$:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \left(1 + \frac{2}{k+1}\right) u_k + \frac{6}{k+1} \\ &= \frac{k+3}{k+1}\left(4k^2 + 12k + 5\right) + \frac{6}{k+1} \\ &= \frac{(k+3)\left(4k^2 + 12k + 5\right) + 6}{k+1} \\ &= \frac{4k^3 + 24k^2 + 41k + 21}{k+1} \end{aligned}$$

Or on constate que :

$$(k+1)\left(4(k+1)^2 + 12(k+1) + 5\right) = (k+1)\left(4k^2 + 20k + 21\right) = 4k^3 + 24k^2 + 41k + 21$$

On en déduit donc que $u_{k+1} = 4(k+1)^2 + 12(k+1) + 5$, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4n^2 + 12n + 5}$$

3. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d_n = u_{n+1} - u_n &= \left(4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5\right) - \left(4n^2 + 12n + 5\right) \\ &= 4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 + 5 - 4n^2 - 12n - 5 \\ &= 8n + 16 \end{aligned}$$

On calcule alors la différence de deux termes consécutifs :

$$d_{n+1} - d_n = 8(n+1) + 16 - 8n - 16 = 8$$

Cette différence étant constante, la conjecture est validée :

$$\boxed{(d_n) \text{ est arithmétique de raison } 8 \text{ et de premier terme } d_0 = 16}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n : \text{« } 2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 1$: $2^0 = 1$, $1! = 1$ et $1^1 = 1$, donc $1 \leqslant 1 \leqslant 1$ et P_1 est vraie.
Hérédité : Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $2^{k-1} \leqslant k! \leqslant k^k$. On multiplie ces inégalités par $k + 1 > 0$, en remarquant que $(k+1)! = (k+1) \times k!$:

• Pour la minoration, comme $k + 1 \geqslant 2$:

$$(k+1)! = (k+1) \times k! \geqslant (k+1) \times 2^{k-1} \geqslant 2 \times 2^{k-1} = 2^k$$

• Pour la majoration, comme $k \leqslant k + 1$ et donc $k^k \leqslant (k+1)^k$:

$$(k+1)! = (k+1) \times k! \leqslant (k+1) \times k^k \leqslant (k+1) \times (k+1)^k = (k+1)^{k+1}$$

On obtient donc $2^{(k+1)-1} \leqslant (k+1)! \leqslant (k+1)^{k+1}$, ce qui prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« il existe un entier impair } \lambda_n \text{ tel que } 5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $5^{2^0} = 5^1 = 5$ et $1 + 1 \times 2^2 = 5$. En posant $\lambda_0 = 1$, qui est bien impair, P_0 est donc vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier impair λ_k tel que $5^{2^k} = 1 + \lambda_k 2^{k+2}$. En remarquant que $2^{k+1} = 2 \times 2^k$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 5^{2^{k+1}} &= \left(5^{2^k}\right)^2 = \left(1 + \lambda_k 2^{k+2}\right)^2 \\ &= 1 + 2\lambda_k 2^{k+2} + \lambda_k^2\, 2^{2k+4} \\ &= 1 + \lambda_k 2^{k+3} + \lambda_k^2\, 2^{k+3} \times 2^{k+1} \\ &= 1 + \underbrace{\left(\lambda_k + \lambda_k^2\, 2^{k+1}\right)}_{=\lambda_{k+1}} 2^{(k+1)+2} \end{aligned}$$

Or $k + 1 \geqslant 1$, donc $\lambda_k^2\, 2^{k+1}$ est un entier pair ; comme λ_k est impair, la somme $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \lambda_k^2\, 2^{k+1}$ est un entier impair, ce qui prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, \lambda_n \text{ impair tel que } 5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}}$$

Limites de suites

EXERCICE 19 ⋆

On utilise les limites de référence et les opérations sur les limites.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par produit et somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^2 = -\infty$, donc par somme avec la constante $\sqrt{2}$: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

c) Comme $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi}$

d) Comme $\dfrac{5}{4} > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$, donc par produit par -1 : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + 1) = +\infty$, donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n + 1) = +\infty$, donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

h) Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

i) C'est une forme indéterminée $\infty - \infty$; on factorise par le terme dominant :

$$u_n = n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc le dénominateur tend vers -4, et par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{3}{4}}$

k) C'est une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$; on factorise par n^2 au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}$$

Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 3 : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}}$

l) Forme indéterminée $-\infty+\infty$; on factorise par n :

$$u_n = n\left(-2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

m) On factorise par le terme dominant :

$$u_n = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n^2}-1\right)} = \frac{1}{n}\times\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{3}{n^2}-1}$$

Le second facteur tend vers -1 et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

n) Les deux carrés tendent vers $+\infty$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

o) C'est une forme indéterminée ; on reconnaît une différence de deux carrés :

$$\begin{aligned} u_n &= \big[(n-1)-(2-n)\big]\big[(n-1)+(2-n)\big] \\ &= (2n-3)\times 1 = 2n-3 \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Dans chaque cas, on lève la forme indéterminée en factorisant par le terme dominant, ou en multipliant par la quantité conjuguée.

1. $u_n = \dfrac{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \dfrac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n}}$, d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{4} = +\infty$ et, par le même procédé qu'à l'exercice 19, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{n^2+5} = 0$. Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$
3. En développant le dénominateur puis en factorisant par n^2 :

$$u_n = \frac{n^2\left(-3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{2n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3}{2}}$$

4. $u_n = \dfrac{n\left(10-\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n}\times\dfrac{10-\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$, d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$
5. $u_n = \dfrac{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = n\times\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}}$. Le second facteur tend vers $\dfrac{2}{3} > 0$, donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$
6. On réduit d'abord au même dénominateur :

$$u_n = \frac{3n^2-4-3n(n+1)}{n+1} = \frac{-3n-4}{n+1} = \frac{n\left(-3-\frac{4}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3}$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2\sqrt{n}+17\right) = +\infty$, donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

8. On factorise par $\sqrt{n}$ au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}+1\right)} = \frac{\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{\frac{3}{\sqrt{n}}+1}$$

Le numérateur tend vers $\sqrt{3}$ et le dénominateur vers 1 : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}}$

9. On procède de même en factorisant par n^2 sous chaque racine :

$$u_n = \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$

Les deux racines tendent vers 1, d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

10. Forme indéterminée $\infty - \infty$; on multiplie par la quantité conjuguée :

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

11. On procède de même :

$$u_n = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Le dénominateur tend vers 2, d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

EXERCICE 21 ⋆

On utilise l'encadrement $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ (et de même pour le sinus), ainsi que $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

a) Pour tout $n \geqslant 1$: $-\frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$. Ces deux bornes tendent vers 0, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

b) Pour tout n : $v_n \geqslant 4n-1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(4n-1) = +\infty$, donc par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$

c) Pour tout $n \geqslant 1$: $-\frac{1}{n^4} \leqslant \frac{\sin(n)}{n^4} \leqslant \frac{1}{n^4}$, donc $3-\frac{1}{n^4} \leqslant v_n \leqslant 3+\frac{1}{n^4}$. D'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3}$

d) Pour tout n, on a $v_n \leqslant -5n+2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(-5n+2) = -\infty$, donc par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$

e) Pour tout $n \geqslant 4$: $-\frac{1}{n-3} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n-3}$, et ces deux bornes tendent vers 0, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

f) Pour tout n : $1 \leqslant 2\cos(n)+3 \leqslant 5$, donc $\frac{1}{n^2+5} \leqslant v_n \leqslant \frac{5}{n^2+5}$. Ces deux bornes tendent vers 0, d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

g) Pour tout $n \geqslant 1$: $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, d'où d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

h) Pour tout n : $u_n \geqslant n^2 - 4$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-4) = +\infty$, donc par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

i) Pour tout n : $u_n \geqslant n + 1 - 1 = n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

j) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{n-1}{n^2-1} \leqslant \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \leqslant \frac{n+1}{n^2-1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \leqslant \frac{1}{n-1}$$

Ces deux bornes tendent vers 0, donc le quotient tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes, et par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2}$

EXERCICE 22 ⋆

1. La suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{3x+1}$, fonction croissante sur $\left[-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ comme composée de la fonction affine croissante $x \mapsto 3x+1$ et de la fonction racine carrée, croissante.
Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_{n+1} \leqslant u_n \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_1 = \sqrt{3\times 5+1} = \sqrt{16} = 4 \leqslant 5 = u_0$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{k+1} \leqslant u_k$. En appliquant la fonction f, croissante :

$$u_{k+1} \leqslant u_k \implies f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \implies u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, Q_n : « $u_n \geqslant 0$ ».
Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 0$, donc Q_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $u_k \geqslant 0$, alors $3u_k + 1 \geqslant 1 > 0$, donc u_{k+1} est bien défini et, en tant que racine carrée, $u_{k+1} = \sqrt{3u_k+1} \geqslant 0$, ce qui prouve Q_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{(u_n) \text{ est minorée par } 0}$

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que :

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$$

EXERCICE 23 ⋆

1. La suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{x+5}$, croissante sur $[-5\,;+\infty[$. Démontrons par récurrence la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n \leqslant u_{n+1} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_1 = \sqrt{0+5} = \sqrt{5} \geqslant 0 = u_0$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k \leqslant u_{k+1}$. En appliquant f, croissante :

$$u_k \leqslant u_{k+1} \implies f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \implies u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$$

ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, Q_n : « $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».
Initialisation : $u_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 \leqslant 3$, donc Q_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_k \leqslant 3$. Alors :

$$5 \leqslant u_k + 5 \leqslant 8 \implies \sqrt{5} \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{8}$$

Or $\sqrt{5} \geqslant 0$ et $\sqrt{8} \leqslant \sqrt{9} = 3$, donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$, ce qui prouve Q_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ pour tout n. La suite (u_n) étant croissante et majorée par 3, le théorème de convergence monotone donne :

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$$

3. Notons ℓ sa limite. Comme (u_{n+1}) a la même limite que (u_n), on passe à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \sqrt{\ell + 5} \implies \ell^2 = \ell + 5 \implies \ell^2 - \ell - 5 = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 1 + 20 = 21 > 0$, et ses deux solutions sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Or $\ell \geqslant 0$ d'après la question 2., ce qui élimine la solution négative :

$$\boxed{\ell = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \approx 2{,}79}$$

EXERCICE 24 ⋆

1. On montre d'abord, comme à l'exercice 4, que $u_n > 0$ pour tout n (récurrence immédiate à partir de $u_0 = 3 > 0$), ce qui garantit que v_n est bien défini. Alors, pour tout n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{3}{u_{n+1}} = \frac{3}{\frac{3u_n}{3+2u_n}} \\ &= \frac{3\,(3 + 2u_n)}{3u_n} = \frac{3 + 2u_n}{u_n} \\ &= \frac{3}{u_n} + 2 = v_n + 2 \end{aligned}$$

La différence entre deux termes consécutifs étant constante :

$$\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison 2 et de premier terme } v_0 = 1}$$

2. On en déduit que $v_n = 1 + 2n$, puis que $u_n = \dfrac{3}{v_n}$:

$$u_n = \frac{3}{2n + 1}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n + 1) = +\infty$, donc par quotient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

EXERCICE 25 ⋆

1. La suite est géométrique de raison 3 et de premier terme 2, donc $u_n = 2 \times 3^n$. Les premiers termes (2, 6, 18, 54, …) augmentent très rapidement :

$$\boxed{\text{On conjecture que } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

2. (a) On complète le programme de la façon suivante :

```
n = 0
u = 2
while u <= 1000 :
    u = 3*u
    n = n+1
print(n)
```

(b) On calcule les termes successifs : $u_5 = 2 \times 3^5 = 486$ et $u_6 = 2 \times 3^6 = 1458$. Le plus petit entier cherché est donc :

$$\boxed{n = 6}$$

EXERCICE 26 ⋆

1. Les premiers termes $(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{5}\,;\ldots)$ se rapprochent de 0 :

$$\boxed{\text{On conjecture que } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

2. (a) On complète le programme de la façon suivante :

```
n = 0
v = 1
while v >= 0.001 :
    n = n+1
    v = 1/(2*n+1)
print(n)
```

(b) On résout directement l'inéquation :

$$\frac{1}{2n+1} < 0{,}001 \iff 2n+1 > 1000 \iff n > 499{,}5$$

Le plus petit entier cherché est donc :

$$\boxed{n = 500}$$

EXERCICE 27 ⋆

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1} - 8 &= \frac{1}{4}u_n + 6 - 8 \\ &= \frac{1}{4}u_n - 2 \\ &= \frac{1}{4}(u_n - 8) = \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4} \text{ et de premier terme } v_0 = -6}$$

2. On en déduit l'expression de v_n, puis celle de $u_n = v_n + 8$:

$$\boxed{v_n = -6\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad u_n = 8 - 6\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

3. Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 8}$$

EXERCICE 28 ⋆

La relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{3}$.

1. On applique cette relation :

$$\boxed{u_1 = \frac{5+4}{3} = 3 \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}}$$

2. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n \geqslant 2 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 5 \geqslant 2$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k \geqslant 2$. Alors :

$$u_k \geqslant 2 \implies u_k + 4 \geqslant 6 \implies \frac{u_k + 4}{3} \geqslant 2$$

autrement dit $u_{k+1} \geqslant 2$, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 4}{3} - u_n = \frac{u_n + 4 - 3u_n}{3} = \frac{4 - 2u_n}{3} = \frac{2\,(2 - u_n)}{3}$$

Or $u_n \geqslant 2$ d'après la question 2., donc $2 - u_n \leqslant 0$ et ainsi $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$:

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

4. La suite est décroissante et minorée par 2 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. En passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{\ell + 4}{3} \iff 3\ell = \ell + 4 \iff \ell = 2$$

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n + 4}{3} - 2 = \frac{u_n - 2}{3} = \frac{1}{3} v_n$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{3} \text{ et } v_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

(le premier terme valant $v_0 = u_0 - 2 = 3$).

6. La somme S_n est celle des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \neq 1$:

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

De plus, comme $u_k = v_k + 2$ pour tout k :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k + 2) = S_n + 2(n+1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{9}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{9}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 2n + 2}$$

7. Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$, donc S_n converge, tandis que le terme $2n+2$ tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{9}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty}$$

EXERCICE 29 ⋆⋆

1re méthode

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réduisant au même dénominateur :

$$5 - \frac{16}{u_n + 3} = \frac{5\,(u_n + 3) - 16}{u_n + 3} = \frac{5u_n + 15 - 16}{u_n + 3} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} = u_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}}$$

b) Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } 1 \leqslant u_n \leqslant 2 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $1 \leqslant 2 \leqslant 2$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leqslant u_k \leqslant 2$. Alors $4 \leqslant u_k + 3 \leqslant 5$, et la fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{u_k+3} \leqslant \frac{1}{4} \implies \frac{16}{5} \leqslant \frac{16}{u_k+3} \leqslant 4$$

En multipliant par -1 puis en ajoutant 5, ce qui inverse le sens des inégalités :

$$5-4 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5-\frac{16}{5} \implies 1 \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{9}{5}$$

Comme $\dfrac{9}{5} \leqslant 2$, ceci prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1\,;2]}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5u_n - 1}{u_n+3} - u_n = \frac{5u_n - 1 - u_n(u_n+3)}{u_n+3} \\ &= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n+3} = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n+3} \end{aligned}$$

Le numérateur est un carré, donc positif, et le dénominateur est strictement positif puisque $u_n \geqslant 1$: ce quotient est donc négatif.

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

d) La suite est décroissante et minorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. En passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{5\ell - 1}{\ell+3} \iff \ell^2 + 3\ell = 5\ell - 1 \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell-1)^2 = 0$$

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et } \ell = 1}$$

2^e^ méthode

a) Remarquons d'abord que $u_n > 1$ pour tout n : c'est vrai au rang 0, et si $u_k > 1$ alors

$$u_{k+1} - 1 = \frac{5u_k - 1 - (u_k+3)}{u_k+3} = \frac{4(u_k-1)}{u_k+3} > 0$$

ce qui assure que v_n est bien défini. On utilise alors cette même égalité :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{u_n+3}{4(u_n-1)} \\ &= \frac{(u_n-1)+4}{4(u_n-1)} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{u_n-1} = v_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{1}{4} \text{ et de premier terme } v_0 = 1}$$

b) On en déduit que $v_n = 1 + \dfrac{n}{4} = \dfrac{n+4}{4}$, puis, en inversant la relation $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$:

$$\boxed{v_n = \frac{n+4}{4} \qquad \text{et} \qquad u_n = 1 + \frac{4}{n+4}}$$

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n+4} = 0$, on retrouve bien le résultat de la première méthode :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+1)u_{n+1} - 1 \\ &= (n+1) \times \frac{nu_n + 1}{2(n+1)} - 1 \\ &= \frac{nu_n + 1}{2} - 1 = \frac{nu_n - 1}{2} = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Le premier terme vaut $v_1 = 1 \times \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_1 = \frac{1}{2}}$$

2. On en déduit, pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}5^n$$

Or $v_n = nu_n - 1$, donc $nu_n = 1 + 0{,}5^n$ et, en divisant par $n \neq 0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1 + 0{,}5^n}{n}}$$

3. Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$, donc le numérateur tend vers 1 tandis que le dénominateur tend vers $+\infty$. Par quotient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + 0{,}5^{n+1}}{n+1} - \frac{1 + 0{,}5^n}{n} \\ &= \frac{n\left(1 + 0{,}5^{n+1}\right) - (n+1)\left(1 + 0{,}5^n\right)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n + 0{,}5^n \times 0{,}5n - n - 1 - (n+1)0{,}5^n}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1 + 0{,}5^n\left(0{,}5n - n - 1\right)}{n(n+1)} \\ &= -\frac{1 + 0{,}5^n\left(1 + 0{,}5n\right)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Or $0{,}5^n > 0$ et $1 + 0{,}5n > 0$, donc le numérateur est strictement positif, et le dénominateur également : le quotient précédé du signe $-$ est donc strictement négatif.

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

EXERCICE 31 ⋆⋆

Partie A : première méthode

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réduisant au même dénominateur :

$$2 - \frac{3}{u_n + 2} = \frac{2\left(u_n + 2\right) - 3}{u_n + 2} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = u_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}}$$

2. (a) Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } 0 \leqslant u_n < 1 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 < 1$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_k < 1$. Alors $2 \leqslant u_k + 2 < 3$, et la fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{u_k+2} \leqslant \frac{1}{2} \implies 1 < \frac{3}{u_k+2} \leqslant \frac{3}{2}$$

En multipliant par -1 puis en ajoutant 2 :

$$2 - \frac{3}{2} \leqslant u_{k+1} < 2 - 1 \implies \frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} < 1$$

Comme $\dfrac{1}{2} \geqslant 0$, ceci prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < 1}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} - u_n = \frac{2u_n + 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2} = \frac{1-u_n^2}{u_n+2}$$

Or $0 \leqslant u_n < 1$ donc $u_n^2 < 1$ et $1 - u_n^2 > 0$; de plus $u_n + 2 > 0$. Le quotient est donc strictement positif :

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$$

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell}$$

4. (a) On résout $f(\ell) = \ell$ sur $[0\,;1]$:

$$\frac{2\ell+1}{\ell+2} = \ell \iff 2\ell + 1 = \ell^2 + 2\ell \iff \ell^2 = 1$$

Les solutions sont 1 et -1, or $\ell \in [0\,;1]$:

$$\boxed{\ell = 1}$$

(b) On peut proposer l'algorithme suivant :

```
n = 0
u = 0
while abs(u - 1) >= 10**(-3) :
    u = (2*u+1)/(u+2)
    n = n+1
print(n)
```

Le programme renvoie 7 : l'inégalité $|u_n - 1| < 10^{-3}$ est donc vérifiée à partir du rang 7, et la valeur $\boxed{N = 6}$ convient. (On peut le retrouver avec la partie B : $|u_n - 1| = \dfrac{2}{3^n+1} < 10^{-3}$ équivaut à $3^n > 1999$, or $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$.)

Partie B : deuxième méthode

1. On calcule séparément le numérateur et le dénominateur de v_{n+1} :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n+2} = \frac{u_n - 1}{u_n+2} \quad ; \quad u_{n+1} + 1 = \frac{2u_n + 1 + u_n + 2}{u_n+2} = \frac{3(u_n+1)}{u_n+2}$$

En formant le quotient, les dénominateurs se simplifient :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{u_n - 1}{3(u_n+1)} = \frac{1}{3}v_n$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{3} \text{ et de premier terme } v_0 = -1}$$

2. On en déduit $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$. De plus :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \iff u_n(v_n - 1) = -1 - v_n \iff u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

$$\boxed{v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}}$$

3. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 1 :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

ce qui confirme le résultat de la partie A.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Partie A

1. Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } u_n > 1 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 2 > 1$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k > 1$. Alors :

$$u_{k+1} - 1 = \frac{1 + 3u_k}{3 + u_k} - 1 = \frac{1 + 3u_k - 3 - u_k}{3 + u_k} = \frac{2(u_k - 1)}{3 + u_k}$$

Or $u_k - 1 > 0$ et $3 + u_k > 0$, donc $u_{k+1} - 1 > 0$, autrement dit $u_{k+1} > 1$, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1}$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n} - u_n = \frac{1 + 3u_n - u_n(3 + u_n)}{3 + u_n} \\ &= \frac{1 - u_n^2}{3 + u_n} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}}$$

(b) D'après la question 1., $u_n > 1$, donc $1 - u_n < 0$, tandis que $1 + u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$: le quotient est donc strictement négatif. La suite est ainsi décroissante et minorée par 1, d'où, d'après le théorème de convergence monotone :

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante et converge}}$$

Partie B

1. En faisant fonctionner l'algorithme pour $n = 9$, on obtient (valeurs arrondies à 10^{-4}) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u	0,8000	1,0769	0,9756	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	1,0000

Les termes sont alternativement inférieurs et supérieurs à 1, en s'en rapprochant :

$$\boxed{\text{On conjecture que } (u_n) \text{ converge vers 1}}$$

2. (a) On calcule séparément le numérateur et le dénominateur de v_{n+1} :

$$u_{n+1}-1=\frac{1+0{,}5u_n-0{,}5-u_n}{0{,}5+u_n}=\frac{-0{,}5\,(u_n-1)}{0{,}5+u_n}$$

$$u_{n+1}+1=\frac{1+0{,}5u_n+0{,}5+u_n}{0{,}5+u_n}=\frac{1{,}5\,(u_n+1)}{0{,}5+u_n}$$

En formant le quotient :

$$v_{n+1}=\frac{-0{,}5\,(u_n-1)}{1{,}5\,(u_n+1)}=-\frac{1}{3}v_n$$

$$\boxed{(v_n)\text{ est géométrique de raison }-\frac{1}{3}}$$

(b) Le premier terme vaut $v_0=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$, d'où :

$$\boxed{v_0=\frac{1}{3}\qquad\text{et}\qquad v_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

3. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|v_n|=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\leqslant\frac{1}{3}<1$$

On en déduit que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ v_n\neq 1}$

(b) Comme $v_n\neq 1$, on peut isoler u_n :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}\iff v_n\,(u_n+1)=u_n-1\iff u_n\,(v_n-1)=-1-v_n$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}}$$

(c) Comme $-1<-\dfrac{1}{3}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. Par quotient, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 1 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$$

ce qui valide la conjecture de la question 1.

EXERCICE 33 : TYPE BAC ⋆⋆

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x\geqslant 0$:

$$f'(x)=\frac{3\,(1+2x)-3x\times 2}{(1+2x)^2}=\frac{3+6x-6x}{(1+2x)^2}=\frac{3}{(1+2x)^2}$$

Ce quotient est strictement positif, donc :

$$\boxed{f\text{ est croissante sur }[0\,;+\infty[}$$

2. (a) On applique la relation de récurrence :

$$u_1=\frac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}\qquad;\qquad u_2=\frac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{9}{10}$$

$$\boxed{u_1=\frac{3}{4}\qquad\text{et}\qquad u_2=\frac{9}{10}}$$

(b) Démontrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } 0 < u_n < 1 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 < \dfrac{1}{2} < 1$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_k < 1$. La fonction f étant croissante sur $[0\,;+\infty[$ d'après la question 1., on peut l'appliquer à chaque membre :

$$0 < u_k < 1 \implies f(0) < f(u_k) < f(1) \implies 0 < u_{k+1} < 1$$

puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{3}{3} = 1$. Ceci prouve P_{k+1}.

Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} \\ &= \frac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}}$$

(b) D'après la question 2.b), $0 < u_n < 1$, donc $2u_n > 0$, $1 - u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$: le quotient est strictement positif.

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$$

(c) La suite est croissante et majorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$$

4. (a) Comme $0 < u_n < 1$, le quotient v_n est bien défini. On calcule d'abord :

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{3u_n}{1+2u_n} = \frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n} = \frac{1-u_n}{1+2u_n}$$

Ainsi, en formant le quotient, les dénominateurs se simplifient :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } 3}$$

(b) Le premier terme vaut $v_0 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3^n}$$

(c) On isole u_n dans la relation définissant v_n :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \iff v_n(1-u_n) = u_n \iff v_n = u_n(1+v_n) \iff u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^n}{3^n+1}}$$

(d) On factorise par 3^n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{3^n}{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Or $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et le dénominateur tend vers 1 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

5. (a) La fonction renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 1 - 10^{-2} = 0{,}99$. Or, d'après la question 4.c) :

$$\frac{3^n}{3^n+1} \geqslant 0{,}99 \iff 3^n \geqslant 0{,}99 \times 3^n + 0{,}99 \iff 0{,}01 \times 3^n \geqslant 0{,}99 \iff 3^n \geqslant 99$$

Or $3^4 = 81$ et $3^5 = 243$, donc la console affiche :

`limite(2)` renvoie 5

(b) Mathématiquement, oui : pour tout entier p, on a $1 - u_n = \dfrac{1}{3^n+1}$, qui tend vers 0, donc il existe toujours un rang à partir duquel $u_n \geqslant 1 - 10^{-p}$, et la boucle s'arrête.

La boucle s'arrête pour toute valeur de p

En pratique cependant, la précision des nombres flottants est limitée informatiquement : pour p trop grand (de l'ordre de 16), la valeur $1 - 10^{-p}$ est arrondie à 1, alors que u reste strictement inférieur à 1 : la boucle ne s'arrêterait alors jamais.