EXERCICES – CHAPITRE 1

SUITES NUMÉRIQUES

Raisonnement par récurrence

EXERCICE 1 ⋆

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 9 \times 2^n + 5$.

EXERCICE 2 ⋆

Soit u la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 10$.

EXERCICE 3 ⋆

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$.
Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 5$.

EXERCICE 4 ⋆

Soit u la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.
Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n$.

EXERCICE 5 ⋆

La suite (u_n) est définie par : $u_1 = 0 \quad$ et $\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$

1. Calculer u_2, u_3, u_4.
2. Que peut-on faire comme conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n ?
3. Démontrer cette conjecture par récurrence et donner la valeur exacte de u_{2021}.

EXERCICE 6 ⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

EXERCICE 7 ⋆

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n < 3$.

EXERCICE 8 ⋆

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 1)^2$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 puis déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Somme des carrés

On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1, \quad S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

Somme des cubes

On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1, \quad S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EXERCICE 12 ⋆

La suite (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0\,;1[\\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x(2-x)$ est croissante sur $[0\,;1]$.
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1$
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 13 ⋆⋆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+1}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 2$.
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

EXERCICE 14 ⋆

Démontrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4^n + 5$ est un multiple de 3.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.
4. $\forall n \geqslant 1, \quad n^3 + 2n$ est un multiple de 3.

EXERCICE 15 - TYPE BAC ⋆⋆

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite. Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation ?
2. (a) Montrer que pour tout entier n on a $u_n \leq n + 3$.
   (b) Montrer que pour tout entier n on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

   et en déduire le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_n - n$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 16 - PYTHON ⋆⋆

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right) u_n + \dfrac{6}{n+1} \end{cases}$$

1) a) Calculer u_1 ; u_2 et u_3

   b) Soit la suite (d_n) définie par : $d_n = u_{n+1} - u_n$.
   Écrire une fonction p(n) en Python donnant tous les termes :
   - de 1 à n pour (u_n)
   - de 0 à $(n-1)$ pour (d_n)

   c) Remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	5						
d_n							

   Conjecturer la nature de la suite (d_n).

2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

3) Valider la conjecture émise à la question 1c).

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

Rappel : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la factorielle de n, notée $n!$, est définie par

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n, \text{ avec la convention } 0! = 1$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n tel que

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}.$$

Limites de suites

EXERCICE 19 ⋆

Déterminer la limite de chacune des suites (u_n) suivantes définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

a) $u_n = 3n + 2$

b) $u_n = -5n^2 + \sqrt{2}$

c) $u_n = \pi + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d) $u_n = -\left(\frac{5}{4}\right)^n$

e) $u_n = (n^2 + 1)^2$

f) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

g) $u_n = \dfrac{1}{n} - \sqrt{n}$

h) $u_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$

i) $u_n = n^2 - 2n$

j) $u_n = \dfrac{3}{\frac{1}{n} - 4}$

k) $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2+5}$

l) $u_n = -2n + \sqrt{n}$

m) $u_n = \dfrac{n+1}{3-n^2}$

n) $u_n = (n-1)^2 + (2-n)^2$

o) $u_n = (n-1)^2 - (2-n)^2$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2n+5}{3n-2}$
2. $u_n = \dfrac{n}{4} - 2 + \dfrac{2n}{n^2+5}$
3. $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+1}{2(n+1)^2}$
4. $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2-2}$
5. $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+2}$
6. $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1} - 3n$
7. $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+17}$
8. $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$
9. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$
10. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
11. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

EXERCICE 21 ⋆

À l'aide des théorèmes de comparaison, déterminer la limite de chacune des suites (v_n) suivantes définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

a) $v_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$

b) $v_n = 4n + (-1)^n$

c) $v_n = 3 - \dfrac{\sin(n)}{n^4}$

d) $v_n = -5n - 2\cos(n)$

e) $v_n = \dfrac{(-1)^n}{3-n}$

f) $v_n = \dfrac{2\cos(n)+3}{n^2+5}$

g) $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$

h) $u_n = n^2 - 4(-1)^n$

i) $u_n = n + 1 - \cos(n)$

j) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1} - 2$, $n \geqslant 2$.

EXERCICE 22 ⋆

Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$

1. Montrer que (u_n) est décroissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est minorée.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 23 ⋆

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

1. Montrer que cette suite est croissante.
2. Montrer que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 3$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

EXERCICE 24 ⋆

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 25 ⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n, tel que $u_n > 1000$.
   (a) Recopier et compléter le programme en Python suivant pour qu'il réponde au problème.

```
n = 0
u = ...
while ... :
        u = ...
        n = ...
print (...)
```

   (b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

EXERCICE 26 ⋆

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{2n + 1}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (v_n).
2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n, tel que $v_n < 0{,}001$.
   (a) Recopier et compléter le programme en Python ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
n = 0
v = ...
while ... :
        n = ...
        v = ...
print (...)
```

   (b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

EXERCICE 27 ⋆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 6$ et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 8$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
3. Déterminer les limites des suites (v_n) et (u_n).

EXERCICE 28 ⋆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geq 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
6. Soit les deux suites :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
   Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n.
7. Déterminer les limites des deux suites ci-dessus.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1ère méthode

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n + 3}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1\,;2]$.

c) Établir la relation $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$, et en déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite l.

2ème méthode On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer pour tout n, v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1 + 0{,}5^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + 0{,}5^n(1 + 0{,}5n)}{n(n+1)}$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

EXERCICE 31 ⋆⋆

Deux méthodes pour déterminer la limite d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

Partie A : première méthode

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n + 2}$.

2) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < 1$.

   b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ.

4) On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

(a) Déterminer la valeur de ℓ

(b) Écrire un algorithme déterminant la valeur N tel que : $\forall n > N,\ |u_n - \ell| < 10^{-3}$.
Donner la valeur de N à l'aide de la calculatrice.

Partie B : deuxième méthode

1. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n > 1$.

2) a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n). En déduire que (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Lire n
$u \leftarrow 2$
pour i variant de 1 à n **faire**
$u \leftarrow \dfrac{1+0.5u}{0.5+u}$
Afficher u
fin

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 9$. Les valeurs de u seront arrondies à 10^{-4}.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u									

Conjecturer le comportement de (u_n) à l'infini.

2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

(b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b) montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 33 : TYPE BAC ⋆⋆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.

2) a) Calculer u_1 et u_2.

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

3) a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Démontrer que la suite (u_n) converge.

4) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

(b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

(d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

5) On considère la fonction en langage python suivante :

```
def limite(p) :
    u=0.5
    n=0
    while u<1-10**(-p) :
        u=3*u/(1+2*u)
        n=n+1
    return n
```

(a) Qu'obtient-on si l'on saisit dans la console limite(2) ?

(b) Est-on certain que la boucle while s'arrêtera quelle que soit la valeur de l'entier naturel p entrée en argument ?