CORRIGÉ – CHAPITRE 2

PROBABILITÉS

Rappels de probabilités

EXERCICE 1 ⋆

1. On utilise la probabilité de l'événement contraire :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}4 = \boxed{0{,}6} \qquad \text{et} \qquad P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}5 = \boxed{0{,}5}$$

2. D'après la formule de la proposition 1 :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(A \cup B) = 0{,}7}$$

3. En passant de nouveau à l'événement contraire :

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0{,}7 = \boxed{0{,}3}$$

4. On compare $P(A \cap B)$ au produit $P(A) \times P(B)$:

$$P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2 = P(A \cap B)$$

$$\boxed{\text{les événements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants}}$$

EXERCICE 2 ⋆

1. La carte étant tirée *au hasard*, les 32 cartes ont toutes la même probabilité d'être tirées : on est bien en situation d'équiprobabilité, et on peut appliquer la formule

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Le jeu contient 4 rois et 8 cœurs, donc :

$$P(R) = \frac{4}{32} = \boxed{\frac{1}{8}} \qquad \text{et} \qquad P(C) = \frac{8}{32} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2. L'événement $R \cap C$ est « la carte tirée est le roi de cœur ». Il n'y a qu'une seule carte favorable :

$$\boxed{P(R \cap C) = \frac{1}{32}}$$

3. D'après la formule de la réunion :

$$P(R \cup C) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \boxed{\frac{11}{32}}$$

Autrement dit, il y a 11 chances sur 32 que la carte tirée soit un roi *ou* un cœur (le roi de cœur n'étant compté qu'une seule fois).

4. On compare de nouveau :

$$P(R) \times P(C) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap C)$$

$$\boxed{\text{les événements } R \text{ et } C \text{ sont indépendants}}$$

Ce résultat est cohérent : connaître la couleur de la carte ne renseigne en rien sur sa hauteur.

EXERCICE 3 ⋆

1. (a) On isole $P(A \cap B)$ dans la formule de la réunion :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}72$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0{,}18}$$

(b) On calcule le produit : $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18 = P(A \cap B)$.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants}}$$

2. (a) Cette fois l'indépendance est une hypothèse de l'énoncé : on peut donc s'en servir pour calculer l'intersection.

$$P(C \cap D) = 0{,}25 \times 0{,}4 = \boxed{0{,}1}$$

$$P(C \cup D) = 0{,}25 + 0{,}4 - 0{,}1 = \boxed{0{,}55}$$

(b) L'événement $\overline{C} \cap \overline{D}$ est le contraire de $C \cup D$:

$$P\left(\overline{C} \cap \overline{D}\right) = 1 - P(C \cup D) = 1 - 0{,}55 = \boxed{0{,}45}$$

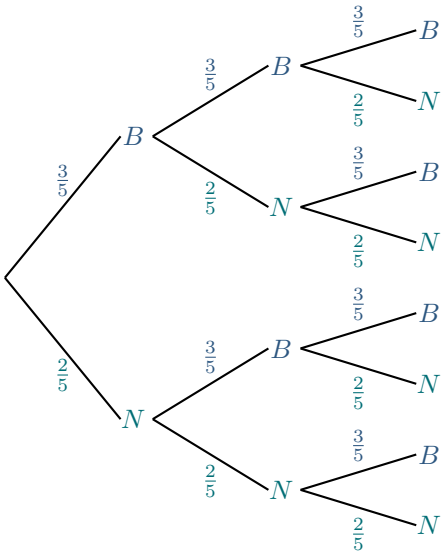
EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne : sa composition est donc identique avant chaque tirage. Le résultat d'un tirage n'influence pas les suivants :

$$\boxed{\text{les trois tirages sont indépendants}}$$

La probabilité de tirer une boule blanche vaut $\frac{3}{5}$ à chaque tirage, et celle de tirer une boule noire $\frac{2}{5}$.

2. On obtient l'arbre pondéré suivant, où B désigne « boule blanche » et N « boule noire » :



3. Les tirages étant indépendants, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches :

$$P(BBB) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(BBB) = \frac{27}{125} = 0{,}216}$$

4. L'événement « au moins une boule noire » est le contraire de « aucune boule noire », c'est-à-dire de l'événement précédent :

$$1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P = \frac{98}{125} = 0{,}784}$$

5. Trois chemins réalisent exactement une boule noire (NBB, BNB et BBN), et chacun a pour probabilité $\frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{18}{125}$:

$$\boxed{P = 3 \times \frac{18}{125} = \frac{54}{125} = 0{,}432}$$

Variables aléatoires

EXERCICE 5 ⋆

1. L'univers est l'ensemble des résultats possibles du dé :

$$\boxed{\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}}$$

La variable X ne prend que trois valeurs :

$$X(1) = X(2) = X(3) = 0 \qquad X(4) = X(5) = 1 \qquad X(6) = 3$$

$$\boxed{X(\Omega) = \{0\,;1\,;3\}}$$

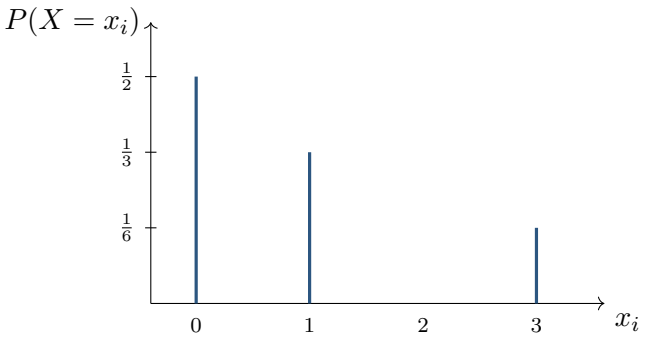
2. Le dé étant équilibré, chaque face a pour probabilité $\frac{1}{6}$:

x_i	0	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. On vérifie la somme :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{1}$$

4. On obtient le diagramme en bâtons suivant :



EXERCICE 6 ⋆

1. La somme des probabilités d'une loi vaut toujours 1 :

$$0{,}2+0{,}3+a+0{,}1=1 \iff a=1-0{,}6 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{a=0{,}4}$$

2. On additionne les probabilités des valeurs concernées :

$$P(X\geqslant 0)=0{,}3+0{,}4+0{,}1=\boxed{0{,}8} \qquad ; \qquad P(X<2)=0{,}2+0{,}3=\boxed{0{,}5}$$

3. On applique la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0{,}2\times(-3)+0{,}3\times 0+0{,}4\times 2+0{,}1\times 5\\ &= -0{,}6+0+0{,}8+0{,}5 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X)=0{,}7}$$

4. On calcule d'abord $E\left(X^2\right)$:

$$E\left(X^2\right)=0{,}2\times 9+0{,}3\times 0+0{,}4\times 4+0{,}1\times 25=1{,}8+1{,}6+2{,}5=\boxed{5{,}9}$$

La formule de König-Huygens donne alors :

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=5{,}9-0{,}7^2=5{,}9-0{,}49$$

$$\boxed{V(X)=5{,}41 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X)=\sqrt{5{,}41}\approx 2{,}33}$$

EXERCICE 7 ⋆

1. Le joueur mise 6 euros dans tous les cas. Il remporte donc $20-6=14$ euros avec le secteur gagnant, $5-6=-1$ euro avec un secteur à 5 euros, et -6 euros sinon :

$$\boxed{X(\Omega)=\{-6\,;-1\,;14\}}$$

Les huit secteurs étant identiques, on est en situation d'équiprobabilité :

x_i	-6	-1	14
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. On calcule l'espérance :

$$E(X)=\frac{1}{2}\times(-6)+\frac{3}{8}\times(-1)+\frac{1}{8}\times 14=\frac{-24-3+14}{8}$$

$$\boxed{E(X)=-\frac{13}{8}=-1{,}625}$$

Sur un très grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 1,625 euro par partie.

3. Un jeu est équitable lorsque $E(X)=0$, ce qui n'est pas le cas ici : le jeu est défavorable au joueur. Le gain moyen *avant* déduction de la mise vaut :

$$\frac{1}{8}\times 20+\frac{3}{8}\times 5+\frac{4}{8}\times 0=\frac{35}{8}=4{,}375$$

$$\boxed{\text{il faudrait fixer la mise à } 4{,}375 \text{ euro}}$$

4. On applique de nouveau König-Huygens :

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{2} \times 36 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 196 = \frac{144 + 3 + 196}{8} = \frac{343}{8} = 42{,}875$$

$$V(X) = 42{,}875 - (-1{,}625)^2 = 42{,}875 - 2{,}640625 = 40{,}234375$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{40{,}234\ldots} \approx 6{,}34 \text{ euros}}$$

Le jeu est donc à la fois défavorable et très dispersé.

EXERCICE 8 ⋆

1. Les trois probabilités sont positives et leur somme vaut :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3 + 2 + 1}{6} = 1$$

Il s'agit bien d'une loi de probabilité. Son espérance vaut :

$$E(Y) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E(Y) = \frac{11}{6}}$$

2. On applique la définition, en calculant chaque écart à l'espérance :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(4 - \frac{11}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{25}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \times \frac{169}{36} \\ &= \frac{75}{216} + \frac{2}{216} + \frac{169}{216} = \frac{246}{216} \end{aligned}$$

$$\boxed{V(Y) = \frac{41}{36} \approx 1{,}14}$$

3. Avec la formule de König-Huygens, on calcule d'abord $E\left(Y^2\right)$:

$$E\left(Y^2\right) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{6} \times 16 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

$$V(Y) = \frac{9}{2} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{162}{36} - \frac{121}{36} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V(Y) = \frac{41}{36}}$$

4. Les deux méthodes donnent bien le même résultat, mais la seconde évite de soustraire l'espérance à chacune des valeurs, et donc de manipuler trois fractions au carré : c'est celle que l'on utilisera systématiquement en pratique.

EXERCICE 9 ⋆

1. L'écart-type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

2. On applique les formules de linéarité avec $a = 5$ et $b = -2$:

$$E(Y) = 5 \times 3 - 2 = \boxed{13} \qquad V(Y) = 5^2 \times 4 = \boxed{100} \qquad \sigma(Y) = |5| \times 2 = \boxed{10}$$

3. Ici $a = -2$ et $b = 7$. On prend garde à la valeur absolue pour l'écart-type :

$$E(Z) = -2 \times 3 + 7 = \boxed{1} \qquad V(Z) = (-2)^2 \times 4 = \boxed{16} \qquad \sigma(Z) = |-2| \times 2 = \boxed{4}$$

4. On écrit d'abord T sous la forme $aX+b$:

$$T=\frac{X-3}{2}=\frac{1}{2}X-\frac{3}{2}$$

d'où, avec $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{3}{2}$:

$$E(T)=\frac{1}{2}\times 3-\frac{3}{2}=\boxed{0}\qquad\text{et}\qquad V(T)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 4=\boxed{1}$$

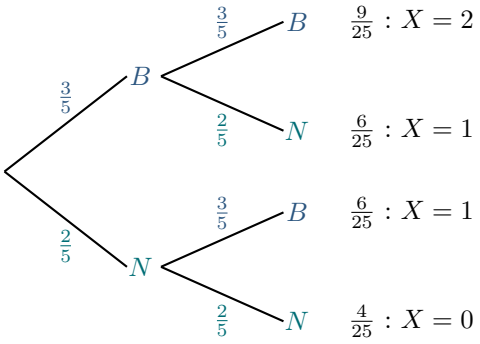
La variable T est ainsi centrée et réduite : c'est un procédé que l'on retrouvera en statistiques.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. On tire deux boules : le nombre de boules blanches obtenues peut valoir 0, 1 ou 2.

$$\boxed{X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\}}$$

2. Les tirages étant effectués avec remise, ils sont indépendants et la probabilité d'obtenir une boule blanche vaut $\dfrac{3}{5}$ à chaque fois.



Deux chemins réalisent $X=1$, d'où la loi :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{12}{25}$	$\dfrac{9}{25}$

La somme vaut bien $\dfrac{4+12+9}{25}=1$.

3. On applique les définitions :

$$E(X)=\frac{4}{25}\times 0+\frac{12}{25}\times 1+\frac{9}{25}\times 2=\frac{30}{25}\qquad\text{d'où}\qquad\boxed{E(X)=\frac{6}{5}=1{,}2}$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{12}{25}\times 1+\frac{9}{25}\times 4=\frac{48}{25}\qquad\text{d'où}\qquad V(X)=\frac{48}{25}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{48-36}{25}$$

$$\boxed{V(X)=\frac{12}{25}=0{,}48}$$

On remarquera que X suit en réalité la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2\,;\frac{3}{5}\right)$, et que l'on retrouve bien les valeurs $E(X)=np=1{,}2$ et $V(X)=np(1-p)=0{,}48$.

4. Sans remise, la composition de l'urne change entre les deux tirages : la probabilité du second tirage dépend du premier.

$$\boxed{\text{les deux tirages ne sont plus indépendants}}$$

Les probabilités du second niveau de l'arbre deviennent $\frac{2}{4}$ et $\frac{2}{4}$ après une boule blanche, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$ après une boule noire, ce qui donne :

$$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20} \qquad P(X=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{12}{20} \qquad P(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$$

$$\boxed{P(X=0)=\frac{1}{10}\ ;\ P(X=1)=\frac{3}{5}\ ;\ P(X=2)=\frac{3}{10}}$$

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. La compagnie encaisse la prime p dans tous les cas, et verse 3 000 euros en cas de sinistre :

x_i	p	$p-3\,000$
$P(X=x_i)$	0,98	0,02

2. On calcule l'espérance :

$$\begin{aligned}E(X)&=0{,}98\times p+0{,}02\times(p-3\,000)\\&=0{,}98p+0{,}02p-60\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X)=p-60}$$

3. Le contrat est équitable lorsque $E(X)=0$, c'est-à-dire lorsque $p-60=0$:

$$\boxed{p=60 \text{ euros}}$$

4. On résout $E(X)=40$, soit $p-60=40$:

$$\boxed{p=100 \text{ euros}}$$

5. L'espérance donne le bénéfice moyen *par contrat*. Sur 10 000 contrats identiques :

$$10\,000\times 40=\boxed{400\,000 \text{ euros}}$$

Épreuves de Bernoulli et combinaisons

EXERCICE 12 ⋆

1. **Oui** : les 15 lancers sont identiques et indépendants, et chacun n'a que deux issues.

$$\boxed{\text{succès : « obtenir pile »},\ p=0{,}5,\ n=15}$$

2. **Non** : les tirages se font *sans remise*, donc la composition du jeu change d'un tirage à l'autre.

$$\boxed{\text{les épreuves ne sont pas indépendantes}}$$

3. **Oui** : la population étant très grande, prélever une personne ne modifie pas sensiblement la proportion de gauchers, et l'on peut assimiler les 200 interrogations à des épreuves identiques et indépendantes.

$$\boxed{\text{succès : « la personne est gauchère »},\ p = 0{,}18,\ n = 200}$$

4. **Non** : chaque lancer a six issues, et surtout la variable étudiée est la *somme* des résultats, et non un nombre de succès.

$$\boxed{\text{ce n'est pas un schéma de Bernoulli}}$$

5. **Oui** : chaque question donne lieu à deux issues, « bonne réponse » ou non, et les questions sont indépendantes puisque l'élève répond au hasard.

$$\boxed{\text{succès : « la réponse est correcte »},\ p = \frac{1}{5} = 0{,}2,\ n = 12}$$

EXERCICE 13 ⋆

1. Chaque coefficient s'obtient en additionnant celui qui le surplombe et son voisin de gauche :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

2. On lit directement dans le tableau :

$$\boxed{\binom{6}{2} = 15 \qquad \binom{7}{3} = 35 \qquad \binom{7}{4} = 35}$$

3. Ces deux coefficients sont égaux : on retrouve la relation de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ici avec $n = 7$ et $k = 3$, puisque $7 - 3 = 4$.

4. On vérifie sur le tableau :

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35 = \binom{7}{3}$$

ce qui illustre bien la relation de Pascal.

EXERCICE 14 ⋆

a) Lecture dans le triangle de Pascal : $\boxed{\binom{6}{2} = 15}$

b) Propriété immédiate $\binom{n}{1} = n$: $\boxed{\binom{10}{1} = 10}$

c) Propriété immédiate $\binom{n}{n} = 1$: $\boxed{\binom{8}{8} = 1}$

d) Par symétrie, $\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$, que l'on lit dans le triangle : $\boxed{\binom{7}{5} = 21}$

e) Par la formule explicite :

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\binom{9}{3} = 84}$$

f) Par symétrie, $\binom{12}{11} = \binom{12}{1}$: $\boxed{\binom{12}{11} = 12}$

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. On applique la formule avec $k = 1$, en remarquant que $n! = n \times (n-1)!$:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n}$$

2. On applique cette fois la formule avec $k = n - 1$:

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \times (n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} = \boxed{n}$$

On peut aussi l'obtenir sans calcul par symétrie : $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-(n-1)} = \binom{n}{1} = n.$

3. On applique la formule avec $k = 2$, en écrivant $n! = n(n-1) \times (n-2)!$:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

4. Choisir deux délégués parmi 30 élèves, c'est choisir une partie de 2 éléments dans un ensemble qui en compte 30, sans tenir compte de l'ordre :

$$\binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = \boxed{435 \text{ façons}}$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Un comité est une partie de 3 membres choisis parmi 12, sans ordre :

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{220 \text{ comités}}$$

2. Une main est un ensemble de 5 cartes, l'ordre dans lequel on les reçoit n'important pas :

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \boxed{201\,376 \text{ mains}}$$

3. Choisir un chemin réalisant 4 succès, c'est choisir quelles épreuves, parmi les 10, seront des succès :
$$\binom{10}{4} = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} = \boxed{210 \text{ chemins}}$$

4. D'après la relation de symétrie, $\binom{10}{6} = \binom{10}{10-6} = \binom{10}{4}$:
$$\boxed{210 \text{ chemins également}}$$
Ce qui se comprend directement : choisir les 6 épreuves qui sont des succès revient à choisir les 4 épreuves qui sont des échecs.

Loi binomiale

EXERCICE 17 ⋆

1. Les 30 lancers sont identiques et indépendants, et l'on ne s'intéresse qu'à deux issues : « obtenir un 6 » ou non.
$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(30\,;\frac{1}{6}\right)}$$

2. Le stock étant très important, le prélèvement est assimilable à un tirage avec remise : les 25 prélèvements sont alors identiques et indépendants.
$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(25\,;0{,}05)}$$

3. Un tirage simultané est un tirage *sans remise* : la composition de l'urne change, et les épreuves ne sont pas indépendantes.
$$\boxed{X \text{ ne suit pas une loi binomiale}}$$

4. Le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance : on répète l'expérience jusqu'à obtenir un succès, et X peut prendre n'importe quelle valeur entière.
$$\boxed{X \text{ ne suit pas une loi binomiale}}$$

EXERCICE 18 ⋆

On applique la formule du théorème 1 : $P(X=k) = \binom{10}{k} \times 0{,}3^k \times 0{,}7^{10-k}$.

a) $P(X=0) = \binom{10}{0} \times 0{,}3^0 \times 0{,}7^{10} = 1\times 1\times 0{,}7^{10}$, d'où $\boxed{P(X=0) \approx 0{,}028}$

b) $P(X=1) = \binom{10}{1} \times 0{,}3^1 \times 0{,}7^9 = 10\times 0{,}3\times 0{,}7^9$, d'où $\boxed{P(X=1) \approx 0{,}121}$

c) $P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^7 = 120\times 0{,}027\times 0{,}7^7$, d'où $\boxed{P(X=3) \approx 0{,}267}$

d) $P(X=10) = \binom{10}{10} \times 0{,}3^{10}\times 0{,}7^0 = 0{,}3^{10}$, d'où $\boxed{P(X=10) \approx 0{,}000}$ (plus précisément $5{,}9\times 10^{-6}$)

EXERCICE 19 ⋆

1. Aucun succès signifie 20 échecs consécutifs :

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\times 0{,}15^0\times 0{,}85^{20}=0{,}85^{20} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X=0)\approx 0{,}0388}$$

2. L'événement $(X\geqslant 1)$ est le contraire de $(X=0)$:

$$P(X\geqslant 1)=1-0{,}0388 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X\geqslant 1)\approx 0{,}9612}$$

3. L'événement $(X\leqslant 2)$ est la réunion des événements $(X=0)$, $(X=1)$ et $(X=2)$, qui sont deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned}P(X\leqslant 2)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&\approx 0{,}0388+0{,}1368+0{,}2293\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X\leqslant 2)\approx 0{,}405}$$

   La calculatrice donne directement ce résultat avec `binomFRep(20;0.15;2)`.

4. L'événement $(X\geqslant 3)$ est le contraire de $(X\leqslant 2)$, et non de $(X\leqslant 3)$:

$$P(X\geqslant 3)=1-P(X\leqslant 2)\approx 1-0{,}405 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X\geqslant 3)\approx 0{,}595}$$

EXERCICE 20 ⋆

1. On applique la formule avec $n=5$ et $p=0{,}4$:

$$\begin{aligned}&P(X=0)=0{,}6^5\approx 0{,}0778 && P(X=1)=5\times 0{,}4\times 0{,}6^4\approx 0{,}2592\\&P(X=2)=10\times 0{,}4^2\times 0{,}6^3\approx 0{,}3456 && P(X=3)=10\times 0{,}4^3\times 0{,}6^2\approx 0{,}2304\\&P(X=4)=5\times 0{,}4^4\times 0{,}6\approx 0{,}0768 && P(X=5)=0{,}4^5\approx 0{,}0102\end{aligned}$$

   On retrouve bien les hauteurs des six bâtons.

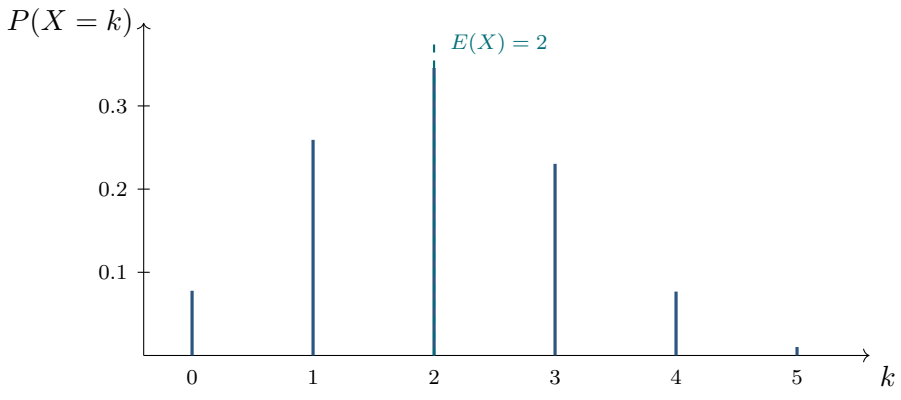
2. On additionne :

$$0{,}0778+0{,}2592+0{,}3456+0{,}2304+0{,}0768+0{,}0102=\boxed{1}$$

   (la somme est exactement égale à 1, les écarts n'étant dus qu'aux arrondis).

3. On applique les formules de la proposition 6 :

$$\boxed{E(X)=5\times 0{,}4=2} \qquad \boxed{V(X)=5\times 0{,}4\times 0{,}6=1{,}2} \qquad \boxed{\sigma(X)=\sqrt{1{,}2}\approx 1{,}10}$$



4. Le bâton le plus haut est celui de $k = 2$:

$$\boxed{\text{la valeur la plus probable de } X \text{ est } 2}$$

Elle coïncide ici avec l'espérance, mais ce n'est pas une règle générale : l'espérance n'est d'ailleurs pas toujours un entier.

EXERCICE 21 ⋆

On applique les formules $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

a) $E(X) = 50 \times 0{,}2 = \boxed{10}$; $V(X) = 50 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = \boxed{8}$; $\sigma(X) = \sqrt{8} \approx \boxed{2{,}83}$

b) $E(Y) = 100 \times 0{,}45 = \boxed{45}$; $V(Y) = 100 \times 0{,}45 \times 0{,}55 = \boxed{24{,}75}$; $\sigma(Y) = \sqrt{24{,}75} \approx \boxed{4{,}97}$

c) $E(Z) = 12 \times \dfrac{1}{3} = \boxed{4}$; $V(Z) = 12 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{8}{3} \approx 2{,}67}$; $\sigma(Z) = \sqrt{\dfrac{8}{3}} \approx \boxed{1{,}63}$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Le candidat répond au hasard à 20 questions indépendantes. Chaque question constitue une épreuve de Bernoulli, de succès « la réponse est correcte », de probabilité $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$ puisqu'une seule des quatre réponses convient. Ces épreuves étant identiques et indépendantes :

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(20\,;0{,}25)}$$

2. On applique la formule du cours :

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0{,}25^5 \times 0{,}75^{15} = 15\,504 \times 0{,}25^5 \times 0{,}75^{15}$$

$$\boxed{P(X = 5) \approx 0{,}202}$$

3. Avec `binomFRep(20 ;0.25 ;3)` :

$$\boxed{P(X \leqslant 3) \approx 0{,}225}$$

4. L'événement $(X \geqslant 10)$ est le contraire de $(X \leqslant 9)$:

$$P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X \geqslant 10) \approx 0{,}014}$$

Un candidat répondant totalement au hasard n'a donc qu'environ 1,4 % de chances d'obtenir la moyenne : le hasard ne remplace pas les révisions.

5. On ramène l'encadrement à des probabilités cumulées, en prenant garde au décalage :

$$P(5 \leqslant X \leqslant 8) = P(X \leqslant 8) - P(X \leqslant 4)$$

$$\boxed{P(5 \leqslant X \leqslant 8) \approx 0{,}544}$$

6. L'espérance donne le nombre moyen de bonnes réponses :

$$E(X) = 20 \times 0{,}25 = \boxed{5 \text{ bonnes réponses}}$$

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Le stock étant très important, les n prélèvements sont assimilables à des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « la pièce est défectueuse » :

$$\boxed{X_n \sim \mathcal{B}(n\,;0{,}02)}$$

2. Aucune pièce défectueuse signifie n échecs consécutifs :

$$P\left(X_n = 0\right) = \binom{n}{0} \times 0{,}02^0 \times 0{,}98^n \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P\left(X_n = 0\right) = 0{,}98^n}$$

3. En passant à l'événement contraire :

$$\boxed{P\left(X_n \geqslant 1\right) = 1 - 0{,}98^n}$$

4. On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0{,}98^n \geqslant 0{,}95$, c'est-à-dire tel que $0{,}98^n \leqslant 0{,}05$. À l'aide d'un tableau de valeurs :

$$0{,}98^{148} \approx 0{,}0503 > 0{,}05 \qquad \text{et} \qquad 0{,}98^{149} \approx 0{,}0493 < 0{,}05$$

$$\boxed{n = 149}$$

5. À partir de 149 pièces prélevées, on est sûr à 95 % d'en trouver au moins une défectueuse. Autrement dit, sur un prélèvement plus petit, il est fréquent de ne détecter aucun défaut alors que la production en contient bel et bien 2 %.

EXERCICE 24 - PYTHON ⋆⋆

1. Il suffit de traduire la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$:

```
from math import comb

def proba(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1-p)**(n-k)
```

2. La probabilité cumulée est la somme des probabilités de 0 à k :

```
def cumul(n, p, k):
    s = 0
    for i in range(k+1):
        s = s + proba(n, p, i)
    return s
```

3. On incrémente n tant que le seuil n'est pas atteint :

```
def seuil(s):
    n = 0
    while 1 - 0.98**n < s :
        n = n + 1
    return n
```

On peut aussi écrire la condition sous la forme `1 - proba(n, 0.02, 0) < s`.

4. La fonction renvoie le plus petit entier n tel que $P\left(X_n \geqslant 1\right)$ dépasse le seuil :

$$\boxed{\texttt{seuil(0.95)} \text{ renvoie } 149 \qquad \text{et} \qquad \texttt{seuil(0.99)} \text{ renvoie } 228}$$

On retrouve bien le résultat de l'exercice 23.

Exercices de synthèse

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise : les 30 prélèvements sont donc des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « le composant est défectueux » et de paramètre $p = 0{,}04$. La variable X compte le nombre de succès :

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(30\,;0{,}04)}$$

2. $P(X=0) = \binom{30}{0} \times 0{,}04^0 \times 0{,}96^{30} = 0{,}96^{30}$:

$$\boxed{P(X=0) \approx 0{,}294}$$

3. $P(X=2) = \binom{30}{2} \times 0{,}04^2 \times 0{,}96^{28} = 435 \times 0{,}0016 \times 0{,}96^{28}$:

$$\boxed{P(X=2) \approx 0{,}222}$$

4. On passe par l'événement contraire :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) \approx 1 - 0{,}294 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X \geqslant 1) \approx 0{,}706}$$

5. « Au plus deux » signifie 0, 1 ou 2 composants défectueux :

$$P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X \leqslant 2) \approx 0{,}883}$$

6. Le lot est refusé lorsque $X > 3$, c'est-à-dire lorsque $X \geqslant 4$, événement contraire de $(X \leqslant 3)$:

$$P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}969 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X \geqslant 4) \approx 0{,}031}$$

   Environ 3 % des lots sont donc refusés.

7. On applique les formules de la loi binomiale :

$$\boxed{E(X) = 30 \times 0{,}04 = 1{,}2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{30 \times 0{,}04 \times 0{,}96} \approx 1{,}07}$$

   Sur un grand nombre de lots de 30 composants, on compte en moyenne 1,2 composant défectueux par lot.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Une partie est constituée de 5 lancers identiques et indépendants, chacun n'ayant que deux issues : atteindre la zone centrale (succès, de probabilité 0,2) ou non. La variable N compte le nombre de succès :

$$\boxed{N \sim \mathcal{B}(5\,;0{,}2)}$$

2. On applique la formule du cours :

$$P(N=0) = 0{,}8^5 \approx \boxed{0{,}328} \qquad ; \qquad P(N=1) = 5 \times 0{,}2 \times 0{,}8^4 \approx \boxed{0{,}410}$$

3. Le joueur remporte 2 euros par succès et paie 3 euros pour jouer :

$$\boxed{G = 2N - 3}$$

4. L'espérance de N vaut $E(N) = 5 \times 0{,}2 = 1$. La linéarité de l'espérance donne alors, sans qu'il soit nécessaire de déterminer la loi de G :

$$E(G) = 2\,E(N) - 3 = 2 \times 1 - 3 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E(N) = 1 \text{ et } E(G) = -1}$$

5. L'espérance de gain étant négative, le jeu n'est pas favorable au joueur : celui-ci perd en moyenne 1 euro par partie. Pour un prix de x euros, on aurait $E(G) = 2 \times 1 - x$, qui s'annule pour :

$$\boxed{x = 2 \text{ euros}}$$

6. On applique la formule de l'écart-type d'une loi binomiale, puis la linéarité :

$$\sigma(N) = \sqrt{5 \times 0{,}2 \times 0{,}8} = \sqrt{0{,}8} \approx \boxed{0{,}89}$$

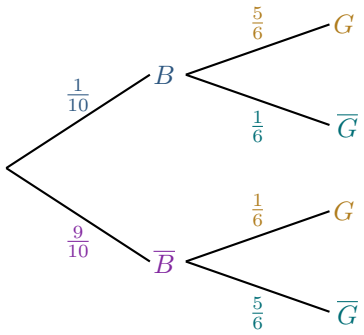
$$\sigma(G) = |2| \times \sigma(N) = 2\sqrt{0{,}8} \approx \boxed{1{,}79}$$

(le -3 n'intervient pas : ajouter une constante ne modifie pas la dispersion).

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A

1. Le tirage du jeton et le lancer du dé sont indépendants. On obtient l'arbre suivant, où l'on a indiqué sur chaque branche du second niveau la probabilité de gagner ou de perdre :



Les événements B et $\overline{B}$ formant une partition de l'univers, on somme les deux chemins menant à G :

$$P(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{60} + \frac{9}{60} = \frac{14}{60} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(G) = \frac{7}{30}}$$

2. On cherche la probabilité de B sachant $\overline{G}$. D'une part $P\left(\overline{G}\right) = 1 - \dfrac{7}{30} = \dfrac{23}{30}$, d'autre part le chemin « jeton blanc puis défaite » donne $P\left(B \cap \overline{G}\right) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{60}$. Ainsi :

$$P_{\overline{G}}(B) = \frac{P\left(B \cap \overline{G}\right)}{P\left(\overline{G}\right)} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{30}} = \frac{1}{60} \times \frac{30}{23} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_{\overline{G}}(B) = \frac{1}{46} \approx 0{,}022}$$

3. (a) Les parties sont identiques et indépendantes, et chacune n'a que deux issues : gagner (avec la probabilité $\frac{7}{30}$) ou perdre.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(n\,;\frac{7}{30}\right)}$$

(b) L'événement « gagner au moins une partie » est le contraire de « n'en gagner aucune » :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n}$$

(c) On cherche le plus petit entier n tel que $\left(\frac{23}{30}\right)^n \leqslant 0{,}01$. La calculatrice donne :

$$\left(\frac{23}{30}\right)^{17} \approx 0{,}0109 > 0{,}01 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{23}{30}\right)^{18} \approx 0{,}0084 < 0{,}01$$

$$\boxed{n = 18 \text{ parties}}$$

Partie B

1. Le joueur paie 1 euro dans tous les cas et reçoit 5 euros s'il gagne : son gain algébrique vaut donc 4 euros en cas de victoire et -1 euro sinon.

y_i	-1	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{23}{30}$	$\frac{7}{30}$

$$E(Y) = \frac{23}{30} \times (-1) + \frac{7}{30} \times 4 = \frac{-23 + 28}{30} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E(Y) = \frac{1}{6} \approx 0{,}17}$$

2. L'espérance étant strictement positive, on a $E(Y) > 0$:

$$\boxed{\text{le jeu n'est pas favorable à l'organisateur}}$$

Celui-ci perd en moyenne environ 17 centimes par partie jouée.

3. Le sac contient alors n jetons noirs et un jeton blanc, soit $n + 1$ jetons au total. En reprenant l'arbre de la partie A :

$$\begin{aligned} P(G) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6(n+1)} + \frac{n}{6(n+1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(G) = \frac{n+5}{6(n+1)}}$$

4. Le gain algébrique vaut toujours 4 en cas de victoire et -1 sinon, donc :

$$E(Y) = 4\,P(G) - \big(1 - P(G)\big) = 5\,P(G) - 1$$

Le jeu est défavorable à l'organisateur lorsque $E(Y) > 0$, c'est-à-dire lorsque $P(G) > \frac{1}{5}$:

$$\begin{aligned} \frac{n+5}{6(n+1)} > \frac{1}{5} &\iff 5(n+5) > 6(n+1) \\ &\iff 5n + 25 > 6n + 6 \\ &\iff 19 > n \end{aligned}$$

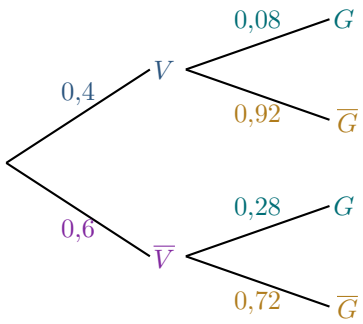
$$\boxed{\text{le jeu est défavorable à l'organisateur pour } n \leqslant 18}$$

Avec 9 jetons noirs, l'organisateur perd donc bien de l'argent : il lui en faudrait au moins 19.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A

1. L'énoncé donne directement $\boxed{P(V) = 0{,}4}$ et $\boxed{P(G) = 0{,}2}$, ainsi que $P_V(G) = 0{,}08$.



2. On multiplie les probabilités le long du chemin :

$$P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0{,}4 \times 0{,}08 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(V \cap G) = 0{,}032}$$

3. Les événements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, donc :

$$P(G) = P(V \cap G) + P\left(\overline{V} \cap G\right) \implies P\left(\overline{V} \cap G\right) = 0{,}2 - 0{,}032 = 0{,}168$$

$$P_{\overline{V}}(G) = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{0{,}168}{0{,}6} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_{\overline{V}}(G) = 0{,}28}$$

4. On compare $P(V \cap G) = 0{,}032$ au produit $P(V) \times P(G) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$. Ces deux nombres sont différents :

$$\boxed{V \text{ et } G \text{ ne sont pas indépendants}}$$

C'est heureux : la probabilité de contracter la grippe passe de 0,28 chez les non-vaccinés à 0,08 chez les vaccinés, ce qui traduit l'efficacité du vaccin.

Partie B

1. Les n interrogations sont assimilées à des tirages successifs, indépendants et avec remise ; chacune n'a que deux issues, « la personne est vaccinée » (de probabilité 0,4) ou non.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(n\,;0{,}4)}$$

2. (a) $P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0{,}4^{15} \times 0{,}6^{25}$, d'où $\boxed{P(X = 15) \approx 0{,}123}$

   (b) « Au moins la moitié » signifie $X \geqslant 20$:

$$P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19) \approx \boxed{0{,}130}$$

   (c) On ramène l'encadrement à des probabilités cumulées :

$$P(5 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 4) \approx \boxed{0{,}035}$$

   (d) $E(X) = 40 \times 0{,}4 = \boxed{16}$: en interrogeant 40 habitants, on peut s'attendre à en trouver 16 vaccinés en moyenne.

3. (a) On cherche le plus petit entier n tel que $E(X) \geqslant 100$:

$$0{,}4n \geqslant 100 \iff n \geqslant 250 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n = 250 \text{ personnes}}$$

(b) Aucune personne vaccinée signifie n échecs consécutifs :

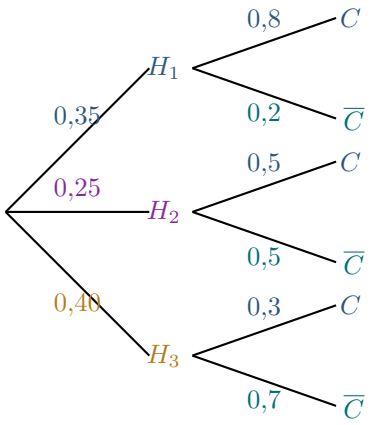
$$\boxed{P(X = 0) = 0{,}6^n}$$

(c) On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0{,}6^n > 0{,}99$, c'est-à-dire tel que $0{,}6^n < 0{,}01$. La calculatrice donne $0{,}6^9 \approx 0{,}0101$ et $0{,}6^{10} \approx 0{,}0060$:

$$\boxed{n = 10 \text{ personnes}}$$

EXERCICE 29 - TYPE BAC ⋆⋆

1. (a) Les trois horticulteurs se partagent la totalité du stock, donc $P(H_3) = 1 - 0{,}35 - 0{,}25 = 0{,}40$.



(b) On multiplie les probabilités le long du chemin :

$$P(H_3 \cap C) = 0{,}40 \times 0{,}30 = \boxed{0{,}12}$$

(c) Les trois horticulteurs formant une partition du stock :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) \\ &= 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}40 \times 0{,}3 \\ &= 0{,}28 + 0{,}125 + 0{,}12 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) = 0{,}525}$$

(d) On applique la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}28}{0{,}525} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_C(H_1) \approx 0{,}533}$$

2. (a) Le stock est suffisamment important pour assimiler le choix des 10 arbres à un tirage avec remise : les 10 prélèvements sont donc des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « l'arbre est un conifère » et de paramètre 0,525.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(10\,;0{,}525)}$$

(b) $E(X) = 10 \times 0{,}525 = \boxed{5{,}25}$: sur un grand nombre d'échantillons de 10 arbres, on compte en moyenne 5,25 conifères par échantillon.

(c) $P(X=5) = \binom{10}{5} \times 0{,}525^5 \times 0{,}475^5 = 252 \times 0{,}525^5 \times 0{,}475^5$:

$$\boxed{P(X=5) \approx 0{,}243}$$

(d) L'échantillon comporte au moins deux arbres à feuilles si et seulement s'il comporte au plus huit conifères, c'est-à-dire si $X \leqslant 8$. On passe à l'événement contraire :

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 8) &= 1 - P(X=9) - P(X=10) \\ &\approx 1 - 0{,}0144 - 0{,}0016 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \leqslant 8) \approx 0{,}984}$$

3. (a) L'événement contraire de A_n est « aucun des n arbres n'est un conifère », c'est-à-dire n échecs consécutifs, chacun de probabilité $1 - 0{,}525 = 0{,}475$:

$$\boxed{P(A_n) = 1 - 0{,}475^n}$$

(b) On cherche le plus petit entier n tel que $0{,}475^n \leqslant 0{,}0001$. La calculatrice donne $0{,}475^{12} \approx 1{,}3 \times 10^{-4}$ et $0{,}475^{13} \approx 6{,}3 \times 10^{-5}$:

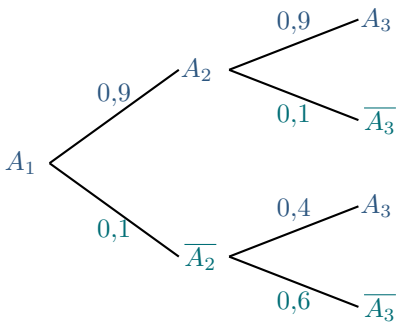
$$\boxed{n = 13 \text{ arbres}}$$

(c) On résout $E(Y_n) \geqslant 100$, avec $E(Y_n) = 0{,}525\,n$:

$$0{,}525\,n \geqslant 100 \iff n \geqslant 190{,}47\ldots \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n = 191 \text{ arbres}}$$

EXERCICE 30 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

1. (a) D'après l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}9$ et $P_{\overline{A_n}}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = 0{,}6$, donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0{,}4$. Comme $p_1 = 1$, on obtient :



(b) Les événements A_2 et $\overline{A_2}$ formant une partition de l'univers :

$$p_3 = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}81 + 0{,}04 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{p_3 = 0{,}85}$$

(c) On applique la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}85} = \frac{0{,}81}{0{,}85} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_{A_3}(A_2) \approx 0{,}95}$$

2. Pour tout $n \geqslant 1$, les événements A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totales donne alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) \\ &= 0{,}9\, p_n + 0{,}4\,(1 - p_n) \\ &= 0{,}9\, p_n + 0{,}4 - 0{,}4\, p_n \end{aligned}$$

$$\boxed{p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}4}$$

3. (a) Démontrons par récurrence la propriété P_n : « $p_n > 0{,}8$ ».
Initialisation : $p_1 = 1 > 0{,}8$, donc P_1 est vraie.
Hérédité : soit $k \geqslant 1$. Supposons $p_k > 0{,}8$. En multipliant par $0{,}5 > 0$ puis en ajoutant $0{,}4$:

$$p_k > 0{,}8 \implies 0{,}5\, p_k > 0{,}4 \implies 0{,}5\, p_k + 0{,}4 > 0{,}8$$

autrement dit $p_{k+1} > 0{,}8$, ce qui prouve P_{k+1}.
Conclusion : par principe de récurrence, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ p_n > 0{,}8}$

(b) Pour tout $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} - p_n = 0{,}5\, p_n + 0{,}4 - p_n = 0{,}4 - 0{,}5\, p_n = 0{,}5\,(0{,}8 - p_n)$$

Or $p_n > 0{,}8$ d'après la question précédente, donc $0{,}8 - p_n < 0$:

$$\boxed{\text{la suite } (p_n) \text{ est décroissante}}$$

(c) La suite (p_n) est décroissante et minorée par $0{,}8$: d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(p_n) \text{ converge}}$

4. (a) Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5\, p_n + 0{,}4 - 0{,}8 \\ &= 0{,}5\, p_n - 0{,}4 = 0{,}5\,(p_n - 0{,}8) = 0{,}5\, v_n \end{aligned}$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } 0{,}5 \text{ et de premier terme } v_1 = p_1 - 0{,}8 = 0{,}2}$$

(b) On en déduit $v_n = 0{,}2 \times 0{,}5^{\,n-1}$. En remarquant que $0{,}2 \times 0{,}5^{\,n-1} = 0{,}4 \times 0{,}5^{\,n}$, et comme $p_n = v_n + 0{,}8$:

$$\boxed{v_n = \frac{2}{5} \times 0{,}5^{\,n} \qquad \text{et} \qquad p_n = 0{,}8 + \frac{2}{5} \times 0{,}5^{\,n}}$$

(c) Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{\,n} = 0$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8}$$

À long terme, la probabilité qu'un client achète un melon une semaine donnée se stabilise autour de $0{,}8$: le détaillant peut estimer que $80\,\%$ de ses clients achèteront un melon chaque semaine.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. D'après la proposition 6 du cours :

$$\boxed{E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p)}$$

2. On forme le quotient, ce qui fait disparaître n :

$$\frac{V(X)}{E(X)} = \frac{np(1-p)}{np} = 1 - p$$

Or ce quotient vaut $\dfrac{4{,}2}{6} = 0{,}7$, donc $1 - p = 0{,}7$:

$$\boxed{p = 0{,}3}$$

3. On reporte dans $E(X) = np = 6$:

$$0{,}3\,n = 6 \iff n = \frac{6}{0{,}3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n = 20}$$

4. La variable X suit donc la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}3)$:

$$P(X = 6) = \binom{20}{6} \times 0{,}3^6 \times 0{,}7^{14} = 38\,760 \times 0{,}3^6 \times 0{,}7^{14}$$

$$\boxed{P(X = 6) \approx 0{,}192}$$

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Les 4 lancers sont identiques et indépendants, de succès « obtenir un 6 » et de probabilité $\dfrac{1}{6}$. En notant X le nombre de 6 obtenus, on a $X \sim \mathcal{B}\left(4\,;\frac{1}{6}\right)$, et A est l'événement $(X \geqslant 1)$:

$$P(A) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(A) \approx 0{,}5177}$$

2. Les deux dés étant indépendants, la probabilité que tous deux donnent un 6 vaut :

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{36}}$$

3. De même, en notant Y le nombre de double 6 obtenus, on a $Y \sim \mathcal{B}\left(24\,;\frac{1}{36}\right)$:

$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(B) \approx 0{,}4914}$$

4. Les deux probabilités sont proches, mais $P(A) > 0{,}5 > P(B)$:

$$\boxed{\text{le chevalier de Méré avait tort}}$$

Le premier pari est légèrement gagnant, le second légèrement perdant. L'écart, de l'ordre de 3 points, n'est décelable qu'après un très grand nombre de parties : c'est précisément ce que l'expérience du joueur avait fini par révéler, sans qu'il puisse l'expliquer.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

1. On écrit les deux probabilités à l'aide de la formule du cours, puis on simplifie le quotient :

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$
$$= \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \times \frac{p}{1-p}$$

Or, d'après la formule explicite :

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \times \frac{k!\,(n-k)!}{n!} = \frac{k!}{(k+1)!} \times \frac{(n-k)!}{(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}$$

$$\boxed{\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p}}$$

2. Comme $P(X=k) > 0$, l'inégalité $P(X=k+1) \geqslant P(X=k)$ équivaut à ce que le quotient précédent soit supérieur ou égal à 1. Les quantités $k+1$ et $1-p$ étant strictement positives, on peut multiplier sans changer le sens :

$$\begin{aligned} \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p} \geqslant 1 &\iff (n-k)p \geqslant (k+1)(1-p) \\ &\iff np - kp \geqslant k+1-kp-p \\ &\iff np \geqslant k+1-p \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X=k+1) \geqslant P(X=k) \iff k \leqslant np-(1-p)}$$

3. Pour $n=10$ et $p=0{,}4$: $np-(1-p) = 4-0{,}6 = 3{,}4$. Les probabilités augmentent donc tant que $k \leqslant 3{,}4$, c'est-à-dire jusqu'à $k=3$, puis diminuent ensuite :

$$P(X=0) \leqslant \cdots \leqslant P(X=3) \leqslant P(X=4) > P(X=5) > \cdots$$

$$\boxed{\text{la valeur la plus probable est } k=4}$$

4. La calculatrice confirme ce résultat :

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,121	0,215	0,251	0,201	0,111

Le maximum est bien atteint en $k=4$, alors que $E(X)=4$ également ici.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1. On applique la formule explicite au membre de gauche, en écrivant $n! = n \times (n-1)!$ et $k! = k \times (k-1)!$:

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k \times n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!\,(n-k)!}$$
$$= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Or $n-k = (n-1)-(k-1)$, donc le second facteur est exactement $\binom{n-1}{k-1}$:

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

2. La variable X prend les valeurs 0, 1, …, n avec $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le terme correspondant à $k=0$ contient le facteur $k=0$: il est donc nul, et la somme peut commencer à $k=1$.

3. En remplaçant $k\binom{n}{k}$ par $n\binom{n-1}{k-1}$ d'après la question 1., puis en factorisant par np (en écrivant $p^k = p \times p^{k-1}$) :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

4. En posant $j = k-1$, la somme précédente s'écrit :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}$$

On y reconnaît la somme de toutes les probabilités d'une variable suivant la loi $\mathcal{B}(n-1\,;p)$, qui vaut donc 1. On en déduit :

$$\boxed{E(X) = np}$$

EXERCICE 35 ⋆⋆

1. Les événements étant indépendants, $P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$, d'où $P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}65$. réponse B

2. Par symétrie, $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \dfrac{9 \times 8}{2} = 36$. réponse A

3. $V(X) = np(1-p) = 40 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 7{,}5$. réponse B

4. Par linéarité, $E(3X-1) = 3\,E(X) - 1 = 6 - 1 = 5$. réponse A

5. L'événement $(X \geqslant 4)$ est le contraire de $(X \leqslant 3)$, et non de $(X \leqslant 4)$. réponse B

6. $V(X) = \sigma(X)^2 = 9$, donc $V(-2X+5) = (-2)^2 \times 9 = 36$: une variance est toujours positive, ce qui élimine d'emblée la réponse C. réponse A

Pour aller plus loin

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. L'urne contient $n+10$ boules, dont n blanches ; les boules étant indiscernables au toucher, la probabilité de tirer une boule blanche vaut $\dfrac{n}{n+10}$ à chaque tirage. Comme on remet la boule tirée, les 20 tirages sont identiques et indépendants : ils forment un schéma de Bernoulli, de succès « tirer une boule blanche ».

$$\boxed{Y_n \sim \mathcal{B}\left(20\,;\frac{n}{n+10}\right)}$$

2. L'événement « obtenir au moins une boule blanche » est $(Y_n \geqslant 1)$, contraire de $(Y_n = 0)$. La probabilité d'échec valant $1 - \dfrac{n}{n+10} = \dfrac{10}{n+10}$:

$$p_n = 1 - P(Y_n = 0) = \boxed{1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}}$$

3. Avec une seule boule blanche parmi onze :

$$p_1 = 1 - \left(\frac{10}{11}\right)^{20} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{p_1 \approx 0{,}8514}$$

Le résultat surprend : la boule blanche n'a qu'environ 9 % de chances de sortir à chaque tirage, et l'on a pourtant plus de 85 % de chances de la voir au moins une fois en 20 tirages. Le calcul de l'espérance le rend moins étonnant : $E(Y_1) = 20 \times \dfrac{1}{11} \approx 1{,}8$, ce qui signifie qu'on obtient en moyenne près de deux boules blanches.

4. Soit $n \geqslant 1$. On a $0 < n+10 < n+11$, donc $0 < \dfrac{10}{n+11} < \dfrac{10}{n+10}$. La fonction $t \mapsto t^{20}$ étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit $\left(\dfrac{10}{n+11}\right)^{20} < \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20}$, puis $p_{n+1} > p_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (p_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a donc $p_n \geqslant p_1 \approx 0{,}85 > \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{p_n \geqslant \frac{1}{2} \text{ pour } \textit{tout} \text{ entier } n \geqslant 1}$$

5. La boucle doit se poursuivre tant que le seuil n'est pas atteint, c'est-à-dire tant que $p_n < s$:

```
def seuil(s):
    n = 1
    while 1 - (10/(n+10))**20 < s :
        n = n + 1
    return n
```

On obtient $p_2 \approx 0{,}9739 < 0{,}99 \leqslant p_3 \approx 0{,}9947$, et $p_4 \approx 0{,}9988 < 0{,}999 \leqslant p_5 \approx 0{,}9997$:

$$\boxed{\texttt{seuil(0.99)} \text{ renvoie } 3 \qquad \text{et} \qquad \texttt{seuil(0.999)} \text{ renvoie } 5}$$

Piège. On pourrait croire qu'il faut autant de boules blanches que de noires pour avoir une chance sur deux d'en tirer une : c'est confondre la probabilité de succès lors d'*un* tirage avec la probabilité d'*au moins un* succès en 20 tirages.

Remarque. On retrouve la démarche des exercices 23 et 24, où l'on cherchait le nombre d'épreuves nécessaire pour atteindre un seuil. Ici, le nombre de tirages est fixé, et c'est la composition de l'urne qui varie.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. Les n dés sont indépendants, et chacun donne un 6 avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$. La probabilité qu'ils donnent tous un 6 est donc le produit de n facteurs égaux à $\dfrac{1}{6}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n}}$$

2. Les N_n lancers sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « les n dés donnent tous un 6 », de probabilité $\dfrac{1}{6^n}$. Ainsi :

$$\boxed{X_n \sim \mathcal{B}\left(4 \times 6^{n-1} ; \frac{1}{6^n}\right)}$$

D'après la formule donnant l'espérance d'une loi binomiale :

$$E(X_n) = 4 \times 6^{n-1} \times \frac{1}{6^n} = \frac{4}{6} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E(X_n) = \frac{2}{3} \text{ pour tout } n \geqslant 1}$$

La « règle de proportion » conserve donc bien quelque chose : le *nombre moyen* de succès, qui reste égal à $\dfrac{2}{3}$ quel que soit le nombre de dés.

3. L'événement $(X_n \geqslant 1)$ est le contraire de $(X_n = 0)$:

$$\boxed{p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{6^n}\right)^{4 \times 6^{n-1}}}$$

Pour $n = 1$ et $n = 2$, on retrouve les deux paris de l'exercice 32 :

$$p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177 \qquad \text{et} \qquad p_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914 \quad \checkmark$$

4. À la calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	1	2	3	4	5	6
p_n	0,5177	0,4914	0,4874	0,4867	0,4866	0,4866

$$\boxed{\text{La suite } (p_n) \text{ semble décroissante, et se stabiliser vers } 0{,}4866.}$$

5. On calcule la limite admise :

$$\boxed{1 - \mathrm{e}^{-2/3} \approx 0{,}4866}$$

Dès $n = 2$, on a $p_n < \dfrac{1}{2}$: le pari est défavorable au joueur, et, d'après la conjecture de la question 4, il le devient même un peu plus lorsque n augmente. La règle de proportion ne sauve donc pas le chevalier de Méré.

6. Le chevalier de Méré raisonnait comme si la probabilité d'obtenir *au moins un* succès ne dépendait que du nombre *moyen* de succès. Or deux variables aléatoires de même espérance peuvent avoir des lois différentes : les variables X_n ont toutes la même espérance $\frac{2}{3}$, mais les probabilités $P(X_n = 0)$, et donc p_n, varient avec n.

$$\boxed{\text{L'espérance ne suffit pas à déterminer } P(X \geqslant 1) \text{ : il faut connaître la loi.}}$$

Remarque. La limite $1 - \mathrm{e}^{-2/3}$ n'a rien d'un hasard : lorsque le nombre d'épreuves est grand et la probabilité de succès petite, avec une espérance λ fixée, $P(X = 0)$ se rapproche de $\mathrm{e}^{-\lambda}$. C'est le point de départ de la loi de Poisson, étudiée après le baccalauréat ; ici $\lambda = \frac{2}{3}$.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

1. Il n'existe que 365 dates possibles. Dès que $m \geqslant 366$, les m personnes ne peuvent donc pas toutes avoir des dates différentes : deux au moins partagent la même.

$$\boxed{p_m = 1 \text{ pour } m \geqslant 366}$$

2. Supposons que les m premières personnes aient des anniversaires deux à deux distincts ; cela se produit avec la probabilité q_m, et ces personnes occupent alors m dates. L'anniversaire de la personne suivante est indépendant des précédents et équiprobable : il évite les m dates déjà prises avec la probabilité $\frac{365 - m}{365}$. Dans l'arbre, les $m + 1$ personnes ont des anniversaires distincts si et seulement si l'on suit la branche « les m premières sont distinctes », puis la branche « la suivante est différente » ; la probabilité de ce chemin est le produit des probabilités de ses branches :

$$\boxed{q_{m+1} = q_m \times \frac{365 - m}{365}}$$

3. Pour $1 \leqslant m \leqslant 364$, on a $0 \leqslant \frac{365 - m}{365} < 1$ et $q_m \geqslant 0$, donc $q_{m+1} \leqslant q_m$: la suite (q_m) est décroissante. En appliquant la relation de proche en proche à partir de $q_1 = 1$, on obtient, pour $1 \leqslant m \leqslant 365$:

$$\boxed{q_m = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365 - m + 1}{365}}$$

Comme $p_m = 1 - q_m$, la suite (p_m) est croissante : plus l'assemblée est nombreuse, plus une coïncidence est probable.

4. La boucle applique la relation de la question 2 à partir de $q_1 = 1$:

```
def anniversaire(m):
    q = 1
    for k in range(1, m):
        q = q * (365 - k) / 365
    return 1 - q
```

Pour $m = 1$, la boucle n'est pas parcourue et la fonction renvoie 0 ; pour $m = 2$, elle renvoie $1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$. ✓

5. On obtient $p_{22} \approx 0{,}4757$ et $p_{23} \approx 0{,}5073$. La suite (p_m) étant croissante, le premier entier qui convient est 23 :

$$\boxed{m = 23} \qquad \text{et} \qquad \boxed{p_{50} \approx 0{,}9704}$$

Dans une classe de 50 élèves, il est donc presque certain que deux d'entre eux fêtent leur anniversaire le même jour.

6. Une paire de personnes est une partie à 2 éléments de l'assemblée :

$$\binom{23}{2} = \frac{23 \times 22}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{253 \text{ paires}}$$

L'intuition du « 183 » répond en fait à une autre question : combien faut-il de personnes pour qu'*une personne donnée* ait une chance sur deux de partager son anniversaire avec quelqu'un ? Ici, au contraire, n'importe quelle paire convient, et chacune des 253 paires offre une occasion de coïncidence. Le nombre de paires croît bien plus vite que le nombre de personnes.

Remarque. Le calcul confirme cette explication de façon frappante. Pour qu'une personne donnée ait au moins une chance sur deux de trouver quelqu'un né le même jour qu'elle, il faut que $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^k \geqslant \frac{1}{2}$, où k est le nombre d'autres personnes ; on trouve à la calculatrice $k \geqslant 253$. Il faut donc 253 autres personnes, soit exactement autant que de paires dans une assemblée de 23.

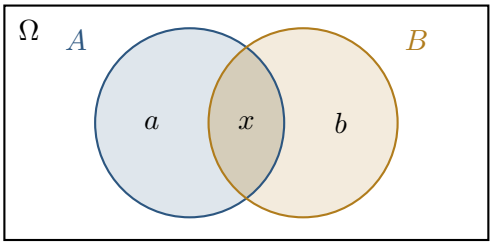
EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

1. On a $P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$, et $P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$, d'où :

$$\boxed{P(A) \times P(B) = 0{,}2 \qquad P(A \cup B) \times P(A \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14}$$

On conjecture que l'on a toujours $P(A \cup B) \times P(A \cap B) \leqslant P(A) \times P(B)$.

2. Les événements $A \cap \overline{B}$, $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ découpent $A \cup B$ en trois morceaux deux à deux incompatibles :



Deux événements incompatibles ont une intersection vide, et la probabilité de leur réunion est donc la somme de leurs probabilités. Comme A est la réunion de $A \cap \overline{B}$ et de $A \cap B$, et ainsi de suite :

$$\boxed{P(A) = a + x \qquad P(B) = b + x \qquad P(A \cup B) = a + b + x}$$

3. On développe, puis on réduit :

$$\begin{aligned} P(A) \times P(B) - P(A \cup B) \times P(A \cap B) &= (a + x)(b + x) - (a + b + x)x \\ &= ab + ax + bx + x^2 - ax - bx - x^2 = \boxed{ab} \end{aligned}$$

Or a et b sont des probabilités, donc positives : leur produit l'est aussi.

$$\boxed{P(A \cup B) \times P(A \cap B) \leqslant P(A) \times P(B)}$$

4. L'égalité a lieu si et seulement si $ab = 0$, c'est-à-dire si $a = 0$ ou $b = 0$: l'un des deux événements $A \cap \overline{B}$ ou $\overline{A} \cap B$ a une probabilité nulle. C'est le cas notamment lorsque A est inclus dans B, ou B dans A.

$$\boxed{\text{Égalité si et seulement si } P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0 \text{ ou } P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0}$$

Par exemple, avec A « obtenir 6 » et B « obtenir 5 ou 6 », on a $A \subset B$, et les deux produits valent $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$. ✓

5. Si $P(A \cup B) = 0{,}8$, l'inégalité de la question 3 donne $0{,}8 \times P(A \cap B) \leqslant 0{,}24$, d'où :

$$\boxed{P(A \cap B) \leqslant \frac{0{,}24}{0{,}8} = 0{,}3}$$

Cette borne est atteinte, par exemple lorsque $A \subset B$ avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}8$.

Remarque. Tout le travail tient dans le choix des inconnues a, b et x, adaptées au découpage de $A \cup B$ en morceaux incompatibles : exprimées avec $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$, les mêmes quantités n'auraient rien laissé voir. Enfin, lorsque A et B sont indépendants, comme ceux de l'exercice 1, on a $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$: l'inégalité se réduit alors à $P(A \cup B) \leqslant 1$ et n'apprend rien. Elle n'a d'intérêt que pour des événements qui ne sont pas indépendants.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

Partie A : tirages avec remise.

1. Les boules étant remises, chaque tirage donne une boule blanche avec la probabilité $\frac{4}{10} = 0{,}4$, et les trois tirages sont identiques et indépendants :

$$\boxed{Y \sim \mathcal{B}(3\,;0{,}4)}$$

La formule $P(Y = k) = \binom{3}{k} 0{,}4^k\, 0{,}6^{3-k}$ donne la loi suivante :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

$$\boxed{E(Y) = 3 \times 0{,}4 = 1{,}2 \qquad V(Y) = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}72}$$

Partie B : tirages sans remise.

2. Non. Si la première boule est blanche, il ne reste que 3 boules blanches parmi 9, et la probabilité que la deuxième soit blanche vaut $\frac{3}{9}$; si la première est noire, elle vaut $\frac{4}{9}$. Le résultat du premier tirage influence donc le second, comme à l'exercice 10.

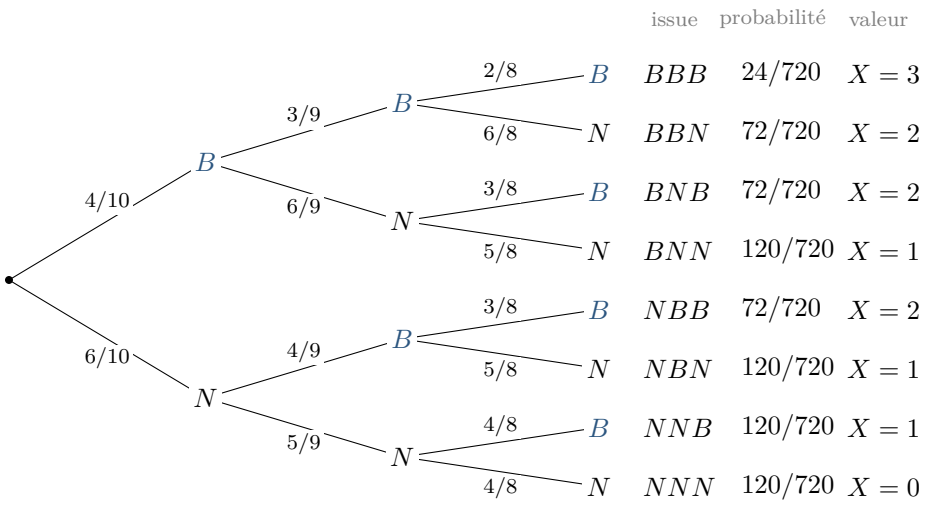
$$\boxed{\text{Les tirages sans remise ne sont pas indépendants.}}$$

3. À chaque étape, les probabilités portées par les branches tiennent compte des boules déjà retirées. On note B une boule blanche et N une boule noire ; les probabilités des chemins sont exprimées en sept-cent-vingtièmes, puisque $10 \times 9 \times 8 = 720$. Les trois chemins réalisant deux boules blanches et une noire ont pour probabilités :

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} \qquad \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \qquad \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8}$$

$$\boxed{\text{Ces trois chemins ont la même probabilité } \frac{72}{720} = \frac{1}{10}}$$

Les numérateurs sont les mêmes facteurs 4, 3 et 6, rencontrés dans un ordre différent. L'arbre complet de l'expérience est le suivant :



4. Sur un chemin comportant k boules blanches, les dénominateurs sont toujours 10, 9 et 8. Les numérateurs des branches « blanche » valent successivement 4, 3, …, puisqu'il reste une boule blanche de moins à chaque fois, et ceux des branches « noire » valent 6, 5, … : seul l'ordre dans lequel ils apparaissent dépend du chemin. Le produit est donc le même pour tous ces chemins. Comme pour la loi binomiale, il y a $\binom{3}{k}$ chemins comportant k boules blanches, et $P(X=k)$ vaut $\binom{3}{k}$ fois la probabilité commune de ces chemins :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$	$3\times\frac{120}{720}=\frac{1}{2}$	$3\times\frac{72}{720}=\frac{3}{10}$	$\frac{24}{720}=\frac{1}{30}$

On vérifie que $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{5+15+9+1}{30}=1$. ✓

5. On calcule l'espérance, puis la variance par la formule de König-Huygens :

$$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=0{,}5+0{,}6+0{,}1=\boxed{1{,}2}$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{2}+4\times\frac{3}{10}+9\times\frac{1}{30}=2 \qquad \text{d'où} \qquad V(X)=2-1{,}2^2=\boxed{0{,}56}$$

Les deux protocoles donnent la même espérance, mais $V(X)<V(Y)$: les tirages sans remise sont moins dispersés. Chaque boule blanche tirée rend la suivante moins probable, ce qui corrige les écarts. Les valeurs extrêmes deviennent ainsi plus rares :

$$P(X=0)\approx 0{,}167 < P(Y=0)=0{,}216 \qquad \text{et} \qquad P(X=3)\approx 0{,}033 < P(Y=3)=0{,}064$$

Même espérance, mais moins de dispersion sans remise.

Partie C : une urne beaucoup plus grande.

6. Avec remise, $Y \sim \mathcal{B}(3\,;0{,}4)$ comme dans la partie A. Sans remise, on suit le chemin « noire, noire, noire » :

$$\boxed{P(Y=0) = 0{,}6^3 = 0{,}216} \qquad \boxed{P(X=0) = \frac{600}{1\,000} \times \frac{599}{999} \times \frac{598}{998} \approx 0{,}2156}$$

Les deux probabilités sont presque égales : lorsque l'urne est grande, retirer trois boules ne modifie pratiquement pas sa composition, et les tirages sans remise se comportent comme des tirages avec remise. C'est exactement ce qui justifie l'exemple du cours : on y modélise le prélèvement de 50 pièces par une loi binomiale, parce que le stock est suffisamment grand pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

Remarque. La loi de X s'appelle la *loi hypergéométrique*. Le chapitre 7, consacré au dénombrement, permettra de l'écrire directement sous la forme $P(X=k) = \binom{4}{k}\binom{6}{3-k} \Big/ \binom{10}{3}$, en comptant les façons de choisir k boules blanches et $3-k$ boules noires. On retrouve par exemple :

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆⋆

1. Avec deux dés équilibrés, les 36 couples de résultats sont équiprobables. La somme 2 n'est obtenue que par $(1\,;1)$, la somme 12 que par $(6\,;6)$, tandis que la somme 7 l'est par les six couples $(1\,;6)$, $(2\,;5)$, $(3\,;4)$, $(4\,;3)$, $(5\,;2)$ et $(6\,;1)$:

$$\boxed{P(S=2) = \frac{1}{36} \qquad P(S=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(S=12) = \frac{1}{36}}$$

La loi n'est pas uniforme, puisque chacune des 11 valeurs aurait alors pour probabilité $\dfrac{1}{11}$.

2. La somme vaut 2 si et seulement si les deux dés donnent 1, et 12 si et seulement si ils donnent 6. Les lancers étant indépendants :

$$\boxed{P(S=2) = p_1 q_1 \qquad P(S=12) = p_6 q_6}$$

3. L'événement $(S=7)$ est la réunion des six événements incompatibles « le premier dé donne i et le second $7-i$ », pour $1 \leqslant i \leqslant 6$:

$$P(S=7) = p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1$$

Les quatre termes centraux étant des produits de probabilités, ils sont positifs, et on peut les supprimer :

$$\boxed{P(S=7) \geqslant p_1q_6 + p_6q_1}$$

4. Pour x et y positifs, $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ existent, et un carré est positif :

$$x + y - 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{x + y \geqslant 2\sqrt{xy}}$$

5. On applique la question 4 à $x = p_1q_6$ et $y = p_6q_1$, puis l'on regroupe les facteurs :

$$P(S=7) \geqslant p_1q_6 + p_6q_1 \geqslant 2\sqrt{p_1q_6\,p_6q_1} = 2\sqrt{p_1q_1 \times p_6q_6}$$

$$\boxed{P(S=7) \geqslant 2\sqrt{P(S=2) \times P(S=12)}}$$

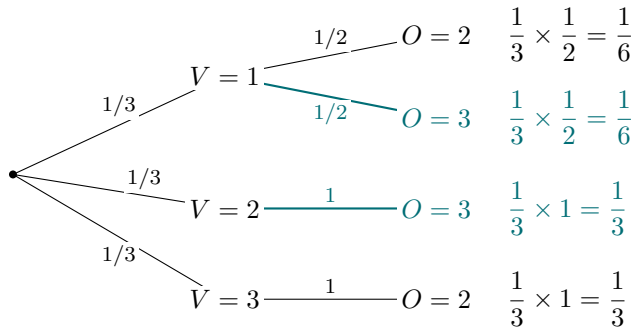
Si S suivait la loi uniforme sur les 11 valeurs de $\{2\,;\ldots\,;12\}$, ces trois probabilités vaudraient $\dfrac{1}{11}$, et l'inégalité deviendrait $\dfrac{1}{11} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{121}} = \dfrac{2}{11}$, ce qui est faux.

$$\boxed{\text{Aucun trucage des deux dés ne rend la somme uniforme.}}$$

Remarque. L'argument ne compare que trois valeurs de la somme : les deux valeurs extrêmes, qui ne s'obtiennent que d'une seule façon, et la valeur centrale, qui s'obtient de six façons. C'est cette dissymétrie entre le nombre de façons d'obtenir chaque somme, et non les valeurs particulières des probabilités, qui interdit l'uniformité.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆⋆

1. Au premier niveau, les trois positions de la voiture sont équiprobables. Au second, si la voiture est derrière la porte 1, le présentateur choisit au hasard entre les portes 2 et 3 ; sinon, il n'a pas le choix, car il doit éviter à la fois la porte du candidat et celle de la voiture. Les chemins réalisant $(O=3)$ sont tracés en bleu pétrole.



$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\quad \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

2. L'événement $(O=3)$ est réalisé par les deux chemins bleu pétrole ; on additionne leurs probabilités :

$$P(O=3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(O=3) = \frac{1}{2}}$$

3. On applique la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_{(O=3)}(V=1) = \frac{P((V=1) \cap (O=3))}{P(O=3)} = \frac{1/6}{1/2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_{(O=3)}(V=1) = \frac{1}{3}}$$

$$P_{(O=3)}(V=2) = \frac{1/3}{1/2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_{(O=3)}(V=2) = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\text{Le candidat a intérêt à changer de porte : il double ainsi ses chances.}}$$

4. La stratégie « toujours conserver » gagne exactement lorsque le premier choix était le bon, ce qui arrive avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$. La stratégie « toujours changer » gagne exactement lorsque le premier choix était mauvais : le présentateur ayant écarté la seule autre chèvre, la porte restante cache alors forcément la voiture. Cela arrive avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{P(\text{gagner en conservant}) = \frac{1}{3} \qquad P(\text{gagner en changeant}) = \frac{2}{3}}$$

5. Le présentateur choisit désormais la porte à ouvrir indépendamment de la position de la voiture. On note $E = (O = 3) \cap (V \neq 3)$ l'événement « la porte 3 est ouverte et cache une chèvre ». Sa probabilité vaut :

$$P(E) = P\big((V = 1) \cap (O = 3)\big) + P\big((V = 2) \cap (O = 3)\big) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P_E(V = 1) = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P_E(V = 2) = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$$

Changer de porte ne sert plus à rien : les deux portes ont la même probabilité $\frac{1}{2}$.

6. Ce qui diffère n'est pas ce que voit le candidat, mais la façon dont cette observation a été produite. Le présentateur informé n'ouvre *jamais* la porte de la voiture : lorsque la voiture est derrière la porte 2, il est *contraint* d'ouvrir la porte 3, ce qui rend cette ouverture deux fois plus probable que lorsque la voiture est derrière la porte 1. Son geste apporte donc une information. Le présentateur ignorant, lui, aurait pu révéler la voiture ; qu'il ne l'ait pas fait est un simple hasard, qui ne favorise aucune des deux portes restantes.

Une probabilité conditionnelle dépend du modèle qui a produit l'observation.

Remarque historique. Le 9 septembre 1990, la chroniqueuse Marilyn vos Savant répond à ce problème dans le magazine américain *Parade* en conseillant de changer de porte. Elle reçoit environ 10 000 lettres, dont près d'un millier signées par des titulaires d'un doctorat, la plupart affirmant qu'elle se trompe. La réponse « une chance sur deux » que défendaient ses contradicteurs est celle de la question 5 : elle suppose, sans le dire, un présentateur qui ne sait rien.