EXERCICES – CHAPITRE 2

PROBABILITÉS

Rappels de probabilités

EXERCICE 1 ⋆

Soient A et B deux événements d'un même univers tels que :

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = 0{,}2$$

1. Calculer $P\left(\overline{A}\right)$ et $P\left(\overline{B}\right)$.
2. Calculer $P(A \cup B)$.
3. En déduire $P\left(\overline{A \cup B}\right)$.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

EXERCICE 2 ⋆

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note R l'événement « la carte tirée est un roi » et C l'événement « la carte tirée est un cœur ».

1. Justifier que l'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité, puis calculer $P(R)$ et $P(C)$.
2. Décrire par une phrase l'événement $R \cap C$, puis calculer sa probabilité.
3. Calculer $P(R \cup C)$ et interpréter le résultat par une phrase.
4. Les événements R et C sont-ils indépendants ?

EXERCICE 3 ⋆

1. Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}72$.
   (a) Calculer $P(A \cap B)$.
   (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Soient C et D deux événements *indépendants* tels que $P(C) = 0{,}25$ et $P(D) = 0{,}4$.
   (a) Calculer $P(C \cap D)$, puis $P(C \cup D)$.
   (b) Calculer $P\left(\overline{C} \cap \overline{D}\right)$.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on recommence : on effectue ainsi trois tirages successifs.

1. Justifier que les trois tirages sont indépendants.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité de n'obtenir que des boules blanches.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule noire.
5. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule noire.

EXERCICE 5 ⋆

On lance un dé équilibré à six faces. On note X la variable aléatoire qui vaut 3 si le résultat est un 6, qui vaut 1 si le résultat est un 4 ou un 5, et qui vaut 0 sinon.

1. Préciser l'univers Ω de cette expérience, puis l'ensemble $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X et la présenter dans un tableau.
3. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
4. Représenter cette loi par un diagramme en bâtons.

EXERCICE 6 ⋆

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	a	0,1

1. Déterminer la valeur du réel a.
2. Calculer $P(X \geqslant 0)$, puis $P(X < 2)$.
3. Calculer l'espérance $E(X)$.
4. Calculer $E\left(X^2\right)$, puis en déduire la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$, arrondi au centième.

EXERCICE 7 ⋆

Une roue de loterie est partagée en 8 secteurs identiques : un secteur fait gagner 20 euros, trois secteurs font gagner 5 euros, et les autres ne font rien gagner. Pour jouer, il faut miser 6 euros. On note X le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la somme remportée diminuée de la mise.

1. Déterminer $X(\Omega)$, puis la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.
3. Le jeu est-il équitable ? Quelle mise faudrait-il fixer pour qu'il le devienne ?
4. Calculer l'écart-type de X, arrondi au centième.

EXERCICE 8 ⋆

La variable aléatoire Y prend les valeurs 1, 2 et 4 avec les probabilités respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité, puis calculer $E(Y)$.
2. Calculer $V(Y)$ en utilisant directement la définition $V(Y) = \sum p_i \left(y_i - E(Y)\right)^2$.
3. Calculer $V(Y)$ à l'aide de la formule de König-Huygens.
4. Comparer les deux méthodes.

EXERCICE 9 ⋆

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 3$ et $V(X) = 4$.

1. Calculer $\sigma(X)$.
2. On pose $Y = 5X - 2$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
3. On pose $Z = -2X + 7$. Calculer $E(Z)$, $V(Z)$ et $\sigma(Z)$.

4. On pose $T = \dfrac{X-3}{2}$. Calculer $E(T)$ et $V(T)$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement et *avec remise* deux boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Reprendre la question 2. dans le cas d'un tirage *sans remise*. Les deux tirages sont-ils encore indépendants ?

EXERCICE 11 ⋆⋆

Une compagnie d'assurance propose un contrat couvrant un sinistre dont la probabilité de survenue est estimée à 0,02 sur une année. En cas de sinistre, la compagnie verse une indemnité de 3 000 euros. Le client paie une prime annuelle de p euros.

On note X le gain algébrique de la compagnie pour un contrat, sur une année.

1. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de p.
2. Exprimer $E(X)$ en fonction de p.
3. Quelle prime la compagnie doit-elle fixer pour que le contrat soit équitable ?
4. Quelle prime doit-elle fixer pour espérer un bénéfice moyen de 40 euros par contrat ?
5. La compagnie a signé 10 000 contrats identiques. Quel bénéfice total peut-elle espérer avec la prime de la question précédente ?

Épreuves de Bernoulli et combinaisons

EXERCICE 12 ⋆

Pour chacune des expériences suivantes, dire s'il s'agit d'un schéma de Bernoulli. Si oui, préciser le succès, sa probabilité p et le nombre n d'épreuves ; sinon, expliquer pourquoi.

1. On lance 15 fois une pièce équilibrée et on s'intéresse au nombre de « pile » obtenus.
2. On tire successivement et sans remise 4 cartes d'un jeu de 32, et on s'intéresse au nombre de rois obtenus.
3. On interroge 200 personnes choisies au hasard dans une très grande population dont 18 % sont gauchères, et on s'intéresse au nombre de gauchers.
4. On lance un dé équilibré 10 fois et on s'intéresse à la somme des résultats obtenus.
5. Un élève répond au hasard aux 12 questions d'un QCM proposant 5 réponses par question, dont une seule est correcte. On s'intéresse au nombre de bonnes réponses.

EXERCICE 13 ⋆

1. Recopier et compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 7$.
2. En déduire les valeurs de $\binom{6}{2}$, $\binom{7}{3}$ et $\binom{7}{4}$.
3. Que remarque-t-on en comparant $\binom{7}{3}$ et $\binom{7}{4}$? Quelle propriété du cours retrouve-t-on ?

4. Vérifier sur cet exemple la relation de Pascal : $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$.

EXERCICE 14 ⋆

Calculer les coefficients binomiaux suivants, en précisant à chaque fois la méthode utilisée (propriété immédiate, symétrie, triangle de Pascal ou formule explicite) :

a) $\binom{6}{2}$ c) $\binom{8}{8}$ e) $\binom{9}{3}$

b) $\binom{10}{1}$ d) $\binom{7}{5}$ f) $\binom{12}{11}$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle la formule explicite :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

1. Démontrer que $\binom{n}{1} = n$.
2. Démontrer que $\binom{n}{n-1} = n$. Retrouver ce résultat à l'aide de la relation de symétrie.
3. Démontrer que $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
4. En déduire le nombre de façons de choisir deux délégués parmi les 30 élèves d'une classe.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Répondre aux questions suivantes à l'aide des coefficients binomiaux, en justifiant le choix de la formule.

1. De combien de façons peut-on constituer un comité de 3 personnes au sein d'une association de 12 membres ?
2. Combien de mains différentes de 5 cartes peut-on former avec un jeu de 32 cartes ?
3. Dans un schéma de Bernoulli à 10 épreuves, combien de chemins de l'arbre réalisent exactement 4 succès ?
4. Combien de chemins réalisent exactement 6 succès ? Justifier le lien avec la question précédente sans effectuer de nouveau calcul.

Loi binomiale

EXERCICE 17 ⋆

Dans chacune des situations suivantes, dire si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui, préciser ses paramètres ; sinon, justifier.

1. On lance 30 fois un dé équilibré ; X compte le nombre de 6 obtenus.
2. Dans un stock très important dont 5 % des articles sont défectueux, on prélève 25 articles au hasard ; X compte le nombre d'articles défectueux prélevés.

3. Une urne contient 10 jetons dont 4 rouges. On tire 3 jetons simultanément ; X compte le nombre de jetons rouges obtenus.
4. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « pile » ; X compte le nombre de lancers effectués.

EXERCICE 18 ⋆

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$. En détaillant l'application de la formule du cours, calculer les probabilités suivantes, arrondies à 10^{-3} :

a) $P(X=0)$
b) $P(X=1)$
c) $P(X=3)$
d) $P(X=10)$

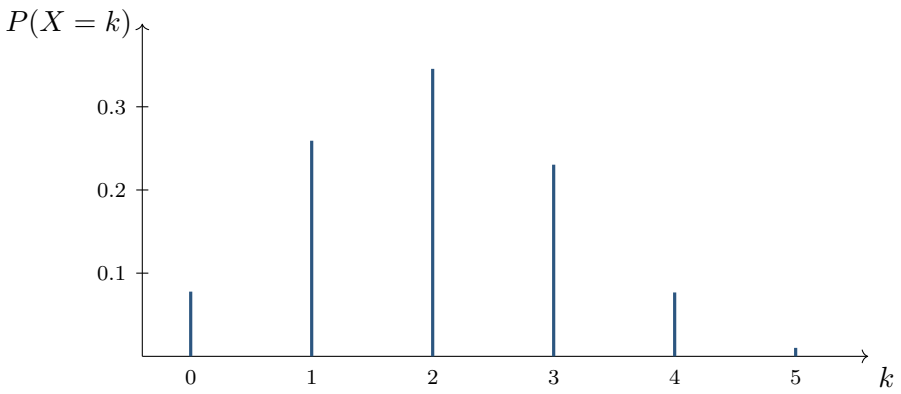
EXERCICE 19 ⋆

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}15)$.

1. Calculer $P(X=0)$, arrondie à 10^{-4}.
2. En déduire $P(X \geqslant 1)$.
3. Calculer $P(X \leqslant 2)$ en décomposant cette probabilité en une somme, puis vérifier le résultat à la calculatrice.
4. En déduire $P(X \geqslant 3)$. *(Attention au décalage d'une unité.)*

EXERCICE 20 ⋆

Le diagramme en bâtons ci-dessous représente la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;0{,}4)$.



1. Retrouver par le calcul la hauteur de chacun des six bâtons, arrondie à 10^{-4}.
2. Vérifier que la somme de ces six probabilités vaut 1.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. Placer l'espérance sur l'axe des abscisses du diagramme.
4. Quelle est la valeur la plus probable de X ? Est-ce l'espérance ?

EXERCICE 21 ⋆

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type (arrondi au centième) de chacune des variables aléatoires suivantes :

a) $X \sim \mathcal{B}(50\,;0{,}2)$
b) $Y \sim \mathcal{B}(100\,;0{,}45)$
c) $Z \sim \mathcal{B}\left(12\,;\dfrac{1}{3}\right)$

EXERCICE 22 ⋆⋆

Un QCM comporte 20 questions indépendantes. Chaque question propose 4 réponses, dont une seule est correcte. Un candidat répond au hasard à toutes les questions, et on note X le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$, arrondie à 10^{-3}.
3. Calculer $P(X \leqslant 3)$ à l'aide de la calculatrice.
4. Calculer $P(X \geqslant 10)$, puis interpréter ce résultat.
5. Calculer $P(5 \leqslant X \leqslant 8)$.
6. Combien de bonnes réponses le candidat peut-il espérer en moyenne ?

EXERCICE 23 ⋆⋆

Dans une chaîne de production, 2 % des pièces présentent un défaut. On prélève au hasard n pièces dans un stock très important, et on note X_n le nombre de pièces défectueuses prélevées.

1. Quelle est la loi suivie par X_n ?
2. Exprimer en fonction de n la probabilité qu'aucune pièce prélevée ne soit défectueuse.
3. En déduire une expression de $P(X_n \geqslant 1)$ en fonction de n.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $P(X_n \geqslant 1) \geqslant 0{,}95$.
5. Interpréter ce résultat par une phrase.

EXERCICE 24 - PYTHON ⋆⋆

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

1. Recopier et compléter la fonction `proba(n,p,k)` ci-dessous, qui renvoie $P(X = k)$. On rappelle que `comb(n,k)` du module `math` renvoie $\binom{n}{k}$.

```
from math import comb

def proba(n, p, k):
    return ...
```

2. Écrire une fonction `cumul(n,p,k)` qui renvoie $P(X \leqslant k)$, en utilisant une boucle et la fonction précédente.
3. On reprend la situation de l'exercice 23. Recopier et compléter la fonction suivante, qui renvoie le plus petit entier n tel que $P(X_n \geqslant 1) \geqslant s$:

```
def seuil(s):
    n = 0
    while ... :
        n = n + 1
    return n
```

4. Que renvoie `seuil(0.95)` ? Et `seuil(0.99)` ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

Une usine fabrique des composants électroniques. Une étude montre que 4 % d'entre eux sont défectueux. On prélève au hasard un lot de 30 composants dans la production, assimilée à un tirage avec remise. On note X le nombre de composants défectueux du lot.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que le lot ne contienne aucun composant défectueux, arrondie à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité que le lot contienne exactement deux composants défectueux.
4. Calculer la probabilité que le lot contienne au moins un composant défectueux.
5. Calculer la probabilité que le lot contienne au plus deux composants défectueux.
6. Un lot est refusé lorsqu'il contient strictement plus de trois composants défectueux. Calculer la probabilité qu'un lot soit refusé.
7. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$, puis interpréter l'espérance dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant. Le joueur lance une fléchette sur une cible ; la probabilité qu'il atteigne la zone centrale est de 0,2, indépendamment des lancers précédents. Une partie consiste en 5 lancers, et le joueur paie 3 euros pour jouer une partie. On note N le nombre de fois où le joueur atteint la zone centrale au cours d'une partie.

1. Justifier que N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(N = 0)$ et $P(N = 1)$, arrondies à 10^{-3}.
3. Le joueur remporte 2 euros par fléchette ayant atteint la zone centrale. On note G le gain algébrique du joueur sur une partie. Exprimer G en fonction de N.
4. Calculer $E(N)$, puis en déduire $E(G)$ sans déterminer la loi de G.
5. Le jeu est-il favorable au joueur ? Quel prix le forain devrait-il fixer pour que le jeu soit équitable ?
6. Calculer $\sigma(N)$, puis $\sigma(G)$.

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant un jeton blanc et neuf jetons noirs, indiscernables au toucher, ainsi que d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le joueur tire un jeton, puis lance le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac. On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne la partie ».

Partie A

1. Représenter la situation par un arbre pondéré, puis montrer que $P(G) = \dfrac{7}{30}$.
2. Le joueur a perdu la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton blanc ?
3. Un joueur effectue n parties de façon indépendante. On note X le nombre de parties gagnées.
   (a) Quelle est la loi suivie par X ?
   (b) Exprimer en fonction de n la probabilité de gagner au moins une partie.

(c) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de parties qu'un joueur doit effectuer pour que cette probabilité dépasse 0,99.

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent : chaque joueur paie 1 euro la partie, et reçoit 5 euros s'il gagne, rien sinon. On note Y le gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y, puis calculer $E(Y)$.
2. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur lorsque $E(Y) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
3. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs, tout en gardant un unique jeton blanc. Montrer que la probabilité de gagner une partie vaut alors $\dfrac{n+5}{6(n+1)}$.
4. Pour quelles valeurs de n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville. Une étude menée à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville, et on considère les événements V : « la personne est vaccinée » et G : « la personne a contracté la grippe ».

Partie A

1. Donner $P(V)$ et $P(G)$, puis représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que la personne choisie soit vaccinée et ait contracté la grippe.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.
4. Les événements V et G sont-ils indépendants ? Commenter ce résultat.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}. Un laboratoire interroge au hasard n habitants de la ville, ce choix étant assimilé à n tirages successifs, indépendants et avec remise. On note X le nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
   (a) Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
   (c) Déterminer la probabilité qu'entre 5 et 10 des personnes interrogées soient vaccinées.
   (d) Déterminer $E(X)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.
3. Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées.
   (b) Exprimer $P(X = 0)$ en fonction de n.
   (c) Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité qu'au moins l'une d'elles soit vaccinée dépasse 0,99.

EXERCICE 29 - TYPE BAC ⋆⋆

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres provenant de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2, et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles. La livraison de H_1 comporte 80 % de conifères, celle de H_2 seulement 50 %, et celle de H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant choisit un arbre au hasard dans son stock. On note H_i l'événement « l'arbre provient de l'horticulteur H_i » et C l'événement « l'arbre choisi est un conifère ».
   (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   (b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère provenant de H_3.
   (c) Justifier que $P(C) = 0{,}525$.
   (d) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il provienne de H_1 ? Arrondir à 10^{-3}.
2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock, suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X le nombre de conifères de l'échantillon.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.
   (c) Quelle est la probabilité que l'échantillon comporte exactement 5 conifères ? Arrondir à 10^{-3}.
   (d) Quelle est la probabilité que l'échantillon comporte au moins deux arbres à feuilles ?
3. Soit n un entier supérieur à 1. On choisit cette fois un échantillon de n arbres, et on note A_n l'événement « au moins un des n arbres choisis est un conifère ».
   (a) Montrer que $P(A_n) = 1 - 0{,}475^n$.
   (b) Déterminer à la calculatrice la taille minimale de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0{,}9999$.
   (c) Déterminer la taille minimale de l'échantillon pour qu'en moyenne, au moins 100 des n arbres choisis soient des conifères.

EXERCICE 30 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

Cet exercice réinvestit le chapitre sur les suites. Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution des ventes de melons. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % en achètent un la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % n'en achètent pas la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « le client achète un melon au cours de la semaine n ». On a ainsi $P(A_1) = 1$, et on pose $p_n = P(A_n)$.

1. (a) Construire l'arbre pondéré relatif aux trois premières semaines.
   (b) Démontrer que $p_3 = 0{,}85$.
   (c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}4$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0{,}8$.
   (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

(c) En déduire que la suite (p_n) est convergente.

4. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0{,}8$.
   (a) Démontrer que (v_n) est géométrique, et préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire que $p_n = 0{,}8 + \dfrac{2}{5} \times 0{,}5^n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ dont on ignore les paramètres. On sait seulement que :

$$E(X) = 6 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 4{,}2$$

1. Exprimer $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de n et p.
2. En formant le quotient $\dfrac{V(X)}{E(X)}$, déterminer la valeur de p.
3. En déduire la valeur de n.
4. Calculer alors $P(X = 6)$, arrondie à 10^{-3}.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Le problème du chevalier de Méré. Au XVII$^{\text{e}}$ siècle, un joueur soumet à Pascal le problème suivant : il pensait avoir autant de chances d'obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé, que d'obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés. L'expérience lui donnait pourtant tort.

1. On lance 4 fois un dé équilibré. On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ». Calculer $P(A)$, arrondie à 10^{-4}.
2. On lance 24 fois deux dés équilibrés. Justifier que la probabilité d'obtenir un double 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{36}$.
3. On note B l'événement « obtenir au moins un double 6 au cours des 24 lancers ». Calculer $P(B)$, arrondie à 10^{-4}.
4. Le chevalier de Méré avait-il raison ? Commenter.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, avec $0 < p < 1$. Le but de l'exercice est de déterminer la valeur la plus probable de X.

1. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Démontrer que :

$$\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p}$$

   (On pourra utiliser la formule explicite des coefficients binomiaux.)
2. En déduire que $P(X = k+1) \geqslant P(X = k)$ si et seulement si $k \leqslant np - (1-p)$.
3. Application : on prend $n = 10$ et $p = 0{,}4$. Déterminer la valeur la plus probable de X.
4. Vérifier ce résultat à la calculatrice en calculant $P(X = k)$ pour k allant de 2 à 6.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Le but de cet exercice est de démontrer la formule $E(X) = np$ pour une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

1. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Démontrer, à l'aide de la formule explicite, que :
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
2. Justifier que $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$, puis que le terme correspondant à $k = 0$ est nul.
3. En utilisant la question 1., démontrer que :
$$E(X) = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$
4. On admet que la somme précédente vaut 1, car elle correspond à la somme de toutes les probabilités d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n-1\,;p)$. Conclure.

EXERCICE 35 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**
1. Si $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ et si A et B sont indépendants, alors $P(A \cup B)$ vaut	0,8	0,65	0,15
2. $\binom{9}{7}$ vaut	36	72	9
3. Si $X \sim \mathcal{B}(40\,;0{,}25)$, alors $V(X)$ vaut	10	7,5	30
4. Si $E(X) = 2$, alors $E(3X-1)$ vaut	5	6	2
5. Si $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$, $P(X \geqslant 4)$ vaut	$1 - P(X \leqslant 4)$	$1 - P(X \leqslant 3)$	$P(X \leqslant 3)$
6. Si $\sigma(X) = 3$, alors $V(-2X+5)$ vaut	36	18	-18

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 36 ⋆⋆

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient 10 boules noires et n boules blanches, indiscernables au toucher. On effectue 20 tirages successifs d'une boule, *avec remise*. On note Y_n le nombre de boules blanches obtenues, et p_n la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche au cours des 20 tirages.

1. Justifier que Y_n suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
2. Démontrer que $p_n = 1 - \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20}$.
3. Calculer p_1, arrondi à 10^{-4}. Ce résultat vous surprend-il ?
4. Démontrer que la suite (p_n) est croissante. En déduire l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tels que $p_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

5. On considère la fonction Python suivante, où `s` désigne un nombre de $]0\,;1[$.

```
def seuil(s):
    n = 1
    while ............ :
        n = n + 1
    return n
```

Compléter la condition de la boucle pour que `seuil(s)` renvoie le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $p_n \geqslant s$. Déterminer alors le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0{,}99$, puis le plus petit tel que $p_n \geqslant 0{,}999$.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Le problème du chevalier de Méré, suite. Cet exercice prolonge l'exercice 32. Pour défendre son intuition, le chevalier de Méré invoquait une « règle de proportion » : en passant d'un dé à deux dés, la probabilité d'obtenir un double 6 est divisée par 6 ; il suffirait donc de multiplier par 6 le nombre de lancers, en passant de 4 à 24, pour conserver les mêmes chances de gain.

Soit n un entier naturel non nul. On lance simultanément n dés équilibrés, et l'on répète ce lancer $N_n = 4 \times 6^{n-1}$ fois, les lancers étant indépendants. On note X_n le nombre de lancers au cours desquels les n dés donnent tous un 6, et l'on pose $p_n = P(X_n \geqslant 1)$.

1. Justifier que, lors d'un lancer, la probabilité que les n dés donnent tous un 6 vaut $\dfrac{1}{6^n}$.
2. Déterminer la loi de X_n, puis démontrer que $E(X_n) = \dfrac{2}{3}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. En quoi ce résultat donne-t-il en partie raison à la « règle de proportion » ?
3. Exprimer p_n en fonction de n. Vérifier que p_1 et p_2 sont les deux probabilités calculées à l'exercice 32.
4. Calculer p_3, p_4, p_5 et p_6, arrondis à 10^{-4}. Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation de la suite (p_n) ?
5. On admet que la suite (p_n) converge vers $1 - \mathrm{e}^{-2/3}$. Donner une valeur approchée de cette limite à 10^{-4} près. Le pari devient-il favorable au joueur lorsque n augmente ?
6. Expliquer en quelques phrases l'erreur de raisonnement du chevalier de Méré.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

Le problème des anniversaires. Dans une assemblée de m personnes, on cherche la probabilité que deux d'entre elles au moins soient nées le même jour de l'année. On ignore les années bissextiles, et l'on suppose que la date d'anniversaire de chaque personne est l'un des 365 jours de l'année, choisi avec équiprobabilité et indépendamment des autres personnes.

On note q_m la probabilité que les m personnes aient des anniversaires deux à deux distincts, avec la convention $q_1 = 1$, et l'on pose $p_m = 1 - q_m$.

1. Que vaut p_m lorsque $m \geqslant 366$? Justifier sans calcul.
2. On considère les personnes l'une après l'autre. En s'appuyant sur un arbre, justifier que pour tout entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant 364$:

$$q_{m+1} = q_m \times \frac{365 - m}{365}$$

3. En déduire que la suite (q_m) est décroissante, puis exprimer q_m sous la forme d'un produit. Quel est le sens de variation de la suite (p_m) ?
4. Écrire une fonction Python `anniversaire(m)` qui renvoie p_m, en utilisant la relation de la question 2.

5. Déterminer le plus petit entier m tel que $p_m > \dfrac{1}{2}$. Calculer également p_{50}, arrondi à 10^{-4}.
6. Beaucoup de personnes pensent qu'il faudrait environ 183 personnes, soit la moitié de 365, pour que p_m dépasse $\dfrac{1}{2}$. Combien de paires distinctes de personnes peut-on former dans une assemblée de 23 personnes ? En quoi ce nombre éclaire-t-il le résultat de la question 5 ?

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

Soient A et B deux événements d'un même univers. On se propose de comparer les deux nombres

$$P(A) \times P(B) \qquad \text{et} \qquad P(A \cup B) \times P(A \cap B)$$

1. On reprend les événements de l'exercice 1, pour lesquels :

   $$P(A) = 0{,}4 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = 0{,}2$$

   Calculer ces deux nombres. Quelle conjecture peut-on formuler ?
2. On revient au cas général, et l'on pose :

   $$x = P(A \cap B) \qquad a = P\left(A \cap \overline{B}\right) \qquad b = P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

   Représenter la situation par un diagramme, puis justifier que $P(A) = a + x$, que $P(B) = b + x$ et que $P(A \cup B) = a + b + x$.
3. Démontrer que $P(A) \times P(B) - P(A \cup B) \times P(A \cap B) = ab$, puis conclure.
4. À quelle condition a-t-on égalité ? Donner un exemple d'événements A et B, lors du lancer d'un dé équilibré, pour lesquels l'égalité est réalisée.
5. Application : deux événements A et B vérifient $P(A) \times P(B) = 0{,}24$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$. Démontrer que $P(A \cap B) \leqslant 0{,}3$.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

Tirages avec ou sans remise. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 blanches et 6 noires. On en tire trois, l'une après l'autre, et l'on s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues. On compare deux protocoles.

Partie A : tirages avec remise. Chaque boule tirée est remise dans l'urne avant le tirage suivant. On note Y le nombre de boules blanches obtenues.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres. Donner sa loi dans un tableau, puis calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Partie B : tirages sans remise. Les boules tirées ne sont plus remises dans l'urne. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

2. Les trois tirages sont-ils encore indépendants ? On pourra comparer avec l'exercice 10.
3. Construire l'arbre pondéré de l'expérience. Calculer la probabilité du chemin « blanche, blanche, noire », puis celles des chemins « blanche, noire, blanche » et « noire, blanche, blanche ». Que constate-t-on ?
4. Justifier que tous les chemins comportant exactement k boules blanches ont la même probabilité. En s'inspirant de la démonstration du cours établissant la loi binomiale, en déduire la loi de X.
5. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Comparer avec la partie A, et interpréter.

Partie C : une urne beaucoup plus grande. L'urne contient maintenant 1 000 boules, dont 400 blanches, et l'on effectue encore trois tirages.

6. Calculer, arrondies à 10^{-4}, la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche avec remise, puis sans remise. Commenter, en rapprochant ce résultat de l'exemple du cours portant sur un lot de pièces défectueuses.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆⋆

Peut-on truquer deux dés ? On lance deux dés à six faces, éventuellement truqués, de façon indépendante. Pour $1 \leqslant i \leqslant 6$, on note p_i la probabilité que le premier dé donne i, et q_i la probabilité que le second donne i. On note S la somme des deux résultats. On se demande s'il est possible de truquer les dés pour que S suive la loi uniforme sur $\{2\,;3\,;\ldots\,;12\}$.

1. Dans le cas de deux dés équilibrés, calculer $P(S=2)$, $P(S=7)$ et $P(S=12)$. La loi de S est-elle uniforme ?
2. On revient au cas général. Exprimer $P(S=2)$ et $P(S=12)$ à l'aide des nombres p_i et q_i.
3. Démontrer que $P(S=7) \geqslant p_1q_6 + p_6q_1$.
4. Démontrer que pour tous réels positifs x et y, on a $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$.
5. En déduire que $P(S=7) \geqslant 2\sqrt{P(S=2)\times P(S=12)}$, puis répondre à la question posée.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆⋆

Le jeu de Monty Hall. Dans un jeu télévisé américain, un candidat fait face à trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres une chèvre. Le candidat désigne une porte, sans l'ouvrir. Le présentateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve une chèvre ; lorsqu'il a le choix entre deux portes, il choisit au hasard, avec équiprobabilité. Il propose enfin au candidat de conserver son choix ou d'en changer.

On suppose que la voiture a été placée au hasard, avec équiprobabilité, et que le candidat désigne la porte 1. On note V le numéro de la porte cachant la voiture, et O celui de la porte ouverte par le présentateur.

1. Construire un arbre pondéré décrivant l'expérience, dont le premier niveau indique la valeur de V et le second celle de O.
2. Calculer $P(O=3)$.
3. Le présentateur ouvre la porte 3. Calculer $P_{(O=3)}(V=1)$ et $P_{(O=3)}(V=2)$. Le candidat a-t-il intérêt à changer de porte ?
4. Retrouver ce résultat sans calcul, en décrivant les cas dans lesquels la stratégie « toujours conserver » et la stratégie « toujours changer » font gagner la voiture.
5. *Variante.* Le présentateur ne sait plus où se trouve la voiture : il ouvre au hasard l'une des portes 2 et 3, avec équiprobabilité. Il ouvre la porte 3, qui se trouve cacher une chèvre. Le candidat a-t-il encore intérêt à changer de porte ?
6. Pourquoi les réponses aux questions 3 et 5 diffèrent-elles, alors que le candidat observe exactement la même chose dans les deux cas ?