CORRIGÉ – CHAPITRE 3

FONCTIONS NUMÉRIQUES

LIMITES D'UNE FONCTION

EXERCICE 1 ⋆

On applique directement la proposition 1 du cours.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = \boxed{+\infty}$ ($x^n \to +\infty$ en $+\infty$).

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = \boxed{+\infty}$ ($n = 4$ est **paire**).

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = \boxed{-\infty}$ ($n = 7$ est **impair**).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \boxed{+\infty}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = \boxed{0}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = \boxed{0}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^5} = \boxed{0}$

On remarque que la parité de n n'intervient que pour x^n en $-\infty$: pour $\dfrac{1}{x^n}$, la limite est 0 dans tous les cas, que n soit pair ou impair.

EXERCICE 2 ⋆

	$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$	$\lim(fg)$	$\lim \dfrac{f}{g}$
1.	5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
2.	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	**F.I.**
3.	0	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**	0
4.	-2	0	-2	0	$\pm\infty$
5.	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**
6.	0	0	0	0	**F.I.**

La case à repérer est celle de la ligne 4, colonne $\dfrac{f}{g}$. Ce n'est pas une forme indéterminée : le numérateur tend vers $-2 \neq 0$ et le dénominateur vers 0, donc le quotient tend vers l'infini. Mais **le signe de cet infini dépend du signe de g au voisinage du point considéré** : si g reste positive, le quotient tend vers $-\infty$; si g reste négative, il tend vers $+\infty$. C'est exactement pour cela que l'on distingue la limite à droite et la limite à gauche.

Piège classique : on retiendra qu'il n'existe que quatre formes indéterminées, et que $\dfrac{\ell}{0}$ avec $\ell \neq 0$ n'en fait pas partie.

EXERCICE 3 ⋆

On factorise à chaque fois par le terme de plus haut degré.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2 = x^3\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^3}\right)$.

La parenthèse tend vers 1 en $+\infty$ comme en $-\infty$. Ce qui nous donne :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$$

b) $g(x) = -2x^4 + 7x - 3 = x^4\left(-2 + \dfrac{7}{x^3} - \dfrac{3}{x^4}\right)$.

La parenthèse tend vers -2, et $x^4 \to +\infty$ des deux côtés :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{-\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$$

c) $h(x) = -x^5 + x^3 + 100x = x^5\left(-1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{100}{x^4}\right)$.

La parenthèse tend vers -1 :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \boxed{-\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \boxed{+\infty}$$

d) $k(x) = 4x^2 - 9x^3 = x^3\left(\dfrac{4}{x} - 9\right)$.

La parenthèse tend vers -9 :

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \boxed{-\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} k(x) = \boxed{+\infty}$$

On retiendra la règle générale ainsi mise en évidence : en $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

EXERCICE 4 ⋆

Dans chaque cas, numérateur et dénominateur tendent vers l'infini : il s'agit d'une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$, que l'on lève en factorisant haut et bas par le terme de plus haut degré.

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2} = \dfrac{x\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \dfrac{3 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \longrightarrow \dfrac{3}{1}$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{3}$$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x^2-5} = \dfrac{x^2\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x^2\left(2 - \frac{5}{x^2}\right)} = \dfrac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{5}{x^2}} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) $h(x) = \dfrac{4x-7}{x^2+1} = \dfrac{x\left(4 - \frac{7}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{4 - \frac{7}{x}}{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$.

Le numérateur tend vers 4 et le dénominateur vers $\pm\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \boxed{0}$$

d) $k(x) = \dfrac{5x^2-1}{3-x} = \dfrac{x^2\left(5-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{3}{x}-1\right)} = \dfrac{x\left(5-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{3}{x}-1}$.

Le dénominateur tend vers -1 et le numérateur se comporte comme $5x$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \boxed{-\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} k(x) = \boxed{+\infty}$$

On en déduit la règle pratique : en $\pm\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré. Ici : $\frac{3x}{x}$, $\frac{x^2}{2x^2}$, $\frac{4x}{x^2}$ et $\frac{5x^2}{-x}$.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. Lorsque x tend vers 1, le numérateur tend vers 5, qui est **non nul** : ce n'est donc pas une forme indéterminée, mais il faut déterminer un signe.

   - Pour $x > 1$, on a $x-1 > 0$, donc $x-1 \to 0^+$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \boxed{+\infty}$
   - Pour $x < 1$, on a $x-1 < 0$, donc $x-1 \to 0^-$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \boxed{-\infty}$

   Ces deux limites étant différentes, $\boxed{f \text{ n'admet pas de limite en 1.}}$

2. $g(x) = \dfrac{x-4}{(x+2)^2}$. Le numérateur tend vers $-6 < 0$, et le dénominateur est un **carré** : il tend vers 0 *en restant strictement positif*, quel que soit le côté par lequel on approche -2. Il n'y a donc pas lieu de distinguer les deux côtés :

$$\lim_{x\to-2} g(x) = \boxed{-\infty}$$

3. $h(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$. En 3, le numérateur *et* le dénominateur tendent vers 0 : c'est bien la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On factorise le numérateur :

$$h(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \qquad \text{pour } x \neq 3$$

   On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to3} h(x) = \boxed{6}$.

4. $k(x) = \dfrac{x+5}{3-x}$. Le numérateur tend vers $8 > 0$. *Attention au sens de la soustraction :*

   - Pour $x > 3$, on a $3-x < 0$, donc $\lim\limits_{x\to3^+} k(x) = \boxed{-\infty}$
   - Pour $x < 3$, on a $3-x > 0$, donc $\lim\limits_{x\to3^-} k(x) = \boxed{+\infty}$

   Piège classique : on écrit $3-x$ et non $x-3$; les signes sont donc inversés par rapport à la question 1.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Lorsque x s'éloigne vers la droite comme vers la gauche, la courbe se rapproche de la droite horizontale d'ordonnée 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{1}$$

2. Au voisinage de -2, la courbe « part vers le haut » à droite et « vers le bas » à gauche :

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \boxed{+\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = \boxed{-\infty}$$

3. $\boxed{y = 1 \text{ est asymptote } \textbf{horizontale}}$ (limite finie en $\pm\infty$) et $\boxed{x = -2 \text{ est asymptote } \textbf{verticale}}$ (limite infinie en un réel).

4. Graphiquement, la courbe est au-dessus de la droite $y = 1$ sur $\boxed{]-2\,;+\infty[}$, et en dessous sur $]-\infty\,;-2[$.

5. Avec $f(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$:

$$f(x) = \frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{en } +\infty \text{ comme en } -\infty$$

En -2, le numérateur tend vers $2 > 0$ et le dénominateur vers 0 :

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty \quad (x+2 \to 0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \quad (x+2 \to 0^-)$$

Le calcul confirme la lecture graphique. On peut d'ailleurs vérifier la question 4. :

$$f(x) - 1 = \frac{x+4}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} = \boxed{\frac{2}{x+2}}$$

qui est strictement positif si et seulement si $x > -2$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. On sait que $f(x) \geqslant x^2 - 5x$ pour tout $x \geqslant 0$. Or

$$x^2 - 5x = x^2\left(1 - \frac{5}{x}\right) \longrightarrow +\infty \quad \text{en } +\infty$$

La fonction f est donc minorée par une fonction qui tend vers $+\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

2. On sait que $g(x) \leqslant -x^3 + 2$ pour $x \geqslant 1$, et $-x^3 + 2 = x^3\left(-1 + \frac{2}{x^3}\right) \to -\infty$ en $+\infty$. La fonction g est donc majorée par une fonction qui tend vers $-\infty$, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$$

3. $h(x) = x + \cos(x)$.

(a) Pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. En ajoutant x aux trois membres :

$$x - 1 \leqslant x + \cos(x) \leqslant x + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{h(x) \geqslant x - 1 \ \text{ et } \ h(x) \leqslant x + 1}$$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$, donc par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \boxed{+\infty}$.

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$, et $h(x) \leqslant x + 1$, donc par comparaison $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \boxed{-\infty}$.

On remarque que la fonction cosinus n'admet aucune limite en $\pm\infty$; c'est bien le fait qu'elle soit **bornée** qui permet de conclure, et non une limite qu'elle n'a pas.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Pour tout $x > 0$: $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donne $1 \leqslant 2 + \sin(x) \leqslant 3$, puis, en divisant par $x > 0$ (ce qui préserve l'ordre) :

   $$\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{x}$$

   Les deux fonctions encadrantes tendent vers 0 en $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes :

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{0}$$

2. On commence par écrire $g(x) = \dfrac{3x + \cos(x)}{x} = 3 + \dfrac{\cos(x)}{x}$. Pour $x > 0$:

   $$3 - \frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant 3 + \frac{1}{x}$$

   Les deux encadrants tendent vers 3, donc

   $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{3}$$

3. Pour $x > 0$: $-\dfrac{1}{x^2} \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, et les deux encadrants tendent vers 0, donc

   $$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \boxed{0}$$

4. Pour $x > 0$: $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant k(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, et les deux encadrants tendent vers 0, donc

   $$\lim_{x \to +\infty} k(x) = \boxed{0}$$

On procède de la même manière à chaque fois : on part de l'encadrement de la fonction bornée (sin ou cos entre -1 et 1), puis on effectue sur les trois membres les mêmes opérations que celles subies par cette fonction dans l'expression.

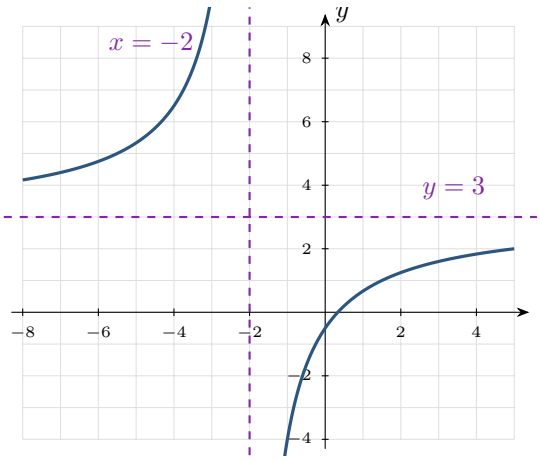
EXERCICE 9 ⋆⋆

Dans les quatre figures qui suivent, la courbe est tracée en bleu ardoise et les asymptotes en pointillés violets.

1. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$, définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-2\}}$.

   En $\pm\infty$: $f(x) = \dfrac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \to 3$, donc $\boxed{y = 3 \text{ est asymptote horizontale.}}$

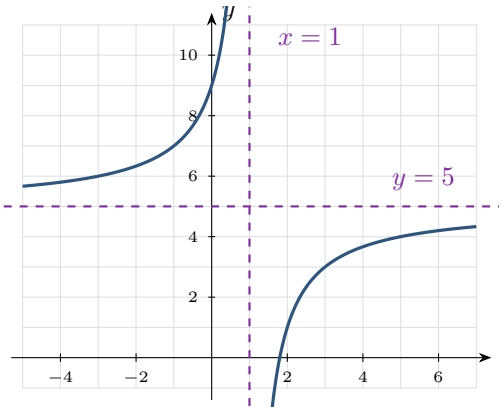
   En -2, le numérateur tend vers $-7 < 0$: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$, donc $\boxed{x = -2 \text{ est asymptote verticale.}}$



2. $g(x) = 5 - \dfrac{4}{x-1}$, définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

   En $\pm\infty$: $\dfrac{4}{x-1} \to 0$, donc $g(x) \to 5$ et $\boxed{y = 5 \text{ est asymptote horizontale.}}$

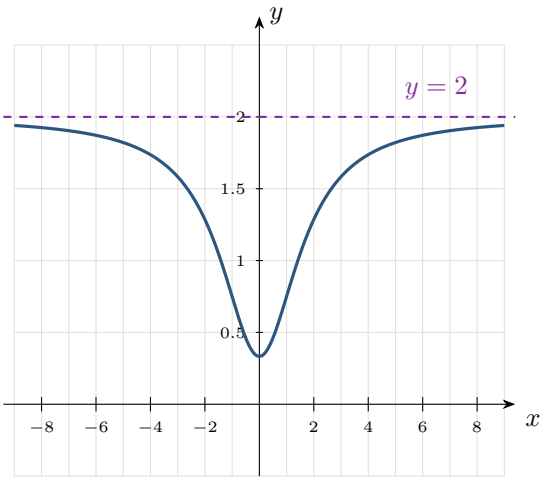
   En 1 : $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$, donc $\boxed{x = 1 \text{ est asymptote verticale.}}$



3. $h(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+3}$. **Le piège est ici :** pour tout réel x, on a $x^2 + 3 \geqslant 3 > 0$, le dénominateur ne s'annule *jamais*. Donc $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}}$

   En $\pm\infty$: $h(x) = \dfrac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \to 2$, donc

   $\boxed{y = 2 \text{ est asymptote horizontale, et il n'y a aucune asymptote verticale.}}$



On voit sur la figure que la courbe se rapproche de la droite $y = 2$ sans jamais l'atteindre, et qu'elle ne présente aucune branche verticale.

4. $k(x) = \dfrac{x+4}{x^2-1} = \dfrac{x+4}{(x-1)(x+1)}$, définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}}$.
En $\pm\infty$: le degré du dénominateur l'emporte, donc $k(x) \to 0$ et

$$\boxed{y = 0 \text{ est asymptote horizontale.}}$$

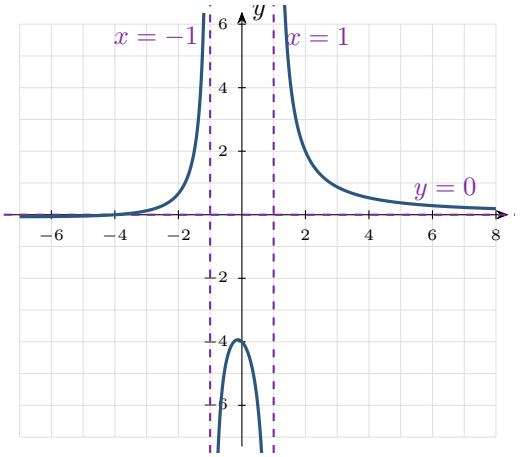
En 1 : le numérateur tend vers $5 > 0$ et $x + 1 \to 2 > 0$, donc le signe est celui de $x - 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} k(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} k(x) = -\infty$$

En -1 : le numérateur tend vers $3 > 0$ et $x - 1 \to -2 < 0$, donc le signe est *l'opposé* de celui de $x + 1$:

$$\lim_{x\to -1^+} k(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -1^-} k(x) = +\infty$$

$$\boxed{x = 1 \text{ et } x = -1 \text{ sont asymptotes verticales.}}$$



On distingue bien les **trois** branches de la courbe, séparées par les deux asymptotes verticales, et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. On réduit au même dénominateur :

$$2 - \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} - \frac{3}{x-1} = \frac{2x-2-3}{x-1} = \boxed{\frac{2x-5}{x-1} = f(x)}$$

Piège classique : il faut bien distribuer le 2 sur $x - 1$, et non écrire $2x - 1$.

2. Sous cette forme, tout se lit sur le terme $\dfrac{3}{x-1}$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 - 0 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 - (+\infty) = \boxed{-\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 - (-\infty) = \boxed{+\infty}$$

3. $\boxed{y = 2 \text{ est asymptote horizontale, et } x = 1 \text{ asymptote verticale.}}$

4. $f(x) - 2 = -\dfrac{3}{x-1}$. Comme $-3 < 0$, ce quotient est du signe contraire de $x - 1$:

- pour $x < 1$: $f(x) - 2 > 0$, donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de son asymptote.}}$
- pour $x > 1$: $f(x) - 2 < 0$, donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de son asymptote.}}$

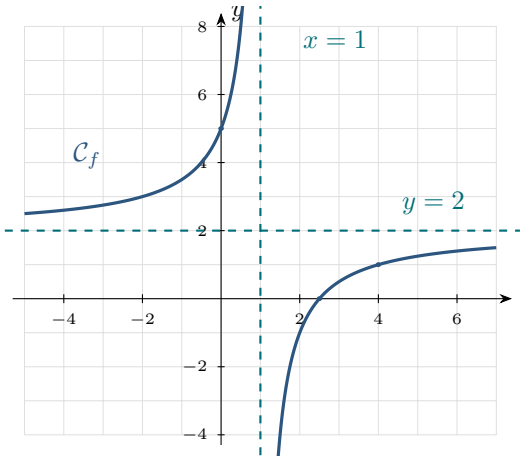
5. L'équation $f(x) = 2$ équivaudrait à $-\dfrac{3}{x-1} = 0$, ce qui est impossible : un quotient de numérateur non nul ne s'annule jamais. Donc

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ ne coupe jamais son asymptote horizontale.}}$$

On remarquera que ce n'est pas une règle générale : le cours rappelle qu'une courbe peut parfaitement traverser son asymptote, et même une infinité de fois, comme celle de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

6. On rassemble tous les renseignements obtenus : deux asymptotes, d'équations $x = 1$ et $y = 2$; la courbe est au-dessus de l'asymptote horizontale à gauche de 1, en dessous à droite, et ne la coupe jamais. On place enfin quelques points pour caler le tracé :

$$f(-5) = \frac{-15}{-6} = 2{,}5 \qquad f(0) = \frac{-5}{-1} = 5 \qquad f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \qquad f(4) = \frac{3}{3} = 1 \qquad f(7) = \frac{9}{6} = 1{,}5$$



On vérifie sur le tracé tout ce qui précède : la branche de gauche reste strictement au-dessus de la droite $y = 2$, celle de droite strictement en dessous, et aucune des deux ne la franchit. La courbe coupe en revanche l'axe des abscisses en $x = \frac{5}{2}$, seul point où $2x - 5 = 0$.

Dérivation

EXERCICE 11 ⋆

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ sur $\mathbb{R}$: $\quad f'(x) = 3 \times 4x^3 - 2 \times 3x^2 + 5 = \boxed{12x^3 - 6x^2 + 5}$

b) $g(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$ sur $\mathbb{R}$, de la forme uv :

$$g'(x) = 2 \times (x^2 + 3) + (2x - 1) \times 2x = 2x^2 + 6 + 4x^2 - 2x = \boxed{6x^2 - 2x + 6}$$

c) $h(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, de la forme $\dfrac{u}{v}$:

$$h'(x) = \frac{1 \times (x-3) - (x+2) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{x - 3 - x - 2}{(x-3)^2} = \boxed{\frac{-5}{(x-3)^2}}$$

Piège classique : le signe $-$ devant la parenthèse porte sur x *et* sur 2.

d) $k(x) = 5\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$:

$$k'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{\frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}}$$

e) $m(x) = x^2\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$, de la forme uv :

$$m'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = \boxed{x(x+2)\,\mathrm{e}^x}$$

f) $n(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$:

$$n'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1 + x - 1) = \boxed{x\,\mathrm{e}^x}$$

EXERCICE 12 ⋆

On applique à chaque fois la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $a = 1$: $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ et $f'(x) = 3x^2 - 2$ donc $f'(1) = 1$.

$$y = 1 \times (x-1) + 0 = \boxed{y = x - 1}$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$: $f(4) = 2$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{x}{4} - 1 + 2 = \boxed{y = \frac{x}{4} + 1}$$

c) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $a = 0$: $f(0) = 1$ et $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

$$y = 1 \times (x-0) + 1 = \boxed{y = x + 1}$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = -2$: $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(-2) = -\dfrac{1}{4}$.

$$y = -\frac{1}{4}(x - (-2)) - \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{y = -\frac{x}{4} - 1}$$

Attention au double signe $-$: $x - a$ vaut ici $x + 2$.

EXERCICE 13 ⋆

On utilise les cas particuliers de la proposition 3, en n'oubliant jamais le facteur $u'(x)$.

a) $u(x) = 2x - 7$, $u'(x) = 2$, forme u^5 : $\quad f'(x) = 5 \times 2 \times (2x-7)^4 = \boxed{10(2x-7)^4}$

b) $u(x) = x^2 + x + 1$, $u'(x) = 2x + 1$, forme u^3 : $\quad g'(x) = \boxed{3(2x+1)(x^2+x+1)^2}$

c) $u(x) = 3x + 4$, $u'(x) = 3$, forme $\sqrt{u}$, sur $\left]-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$: $\quad h'(x) = \boxed{\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}}$

d) $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, forme $\dfrac{1}{u}$: $\quad k'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, soit $\boxed{k'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}}$

e) $u(x) = 5x - 2$, $u'(x) = 5$, forme e^u : $\quad m'(x) = \boxed{5\,\mathrm{e}^{5x-2}}$

f) $u(x) = -x^2$, $u'(x) = -2x$, forme e^u : $\quad n'(x) = \boxed{-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}}$

g) $u(x) = x^2 + 9$, $u'(x) = 2x$, forme $\sqrt{u}$: $\quad p'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}}$

h) $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$, forme u^4 : $\quad q'(x) = 4 \times (-1) \times (1-x)^3 = \boxed{-4(1-x)^3}$

L'erreur la plus fréquente consiste à oublier $u'(x)$: on écrirait par exemple $5(2x-7)^4$ au lieu de $10(2x-7)^4$. Un bon réflexe de contrôle : sur un cas simple comme $(2x)^2 = 4x^2$, la dérivée vaut $8x$, et non $2 \times 2x = 4x$.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. $f(x) = x\sqrt{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$, de la forme uv avec $v = \sqrt{x+1}$:

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x+1} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \boxed{\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}}$$

On remarque que pour additionner, on a écrit $\sqrt{x+1} = \dfrac{(x+1)}{\sqrt{x+1}}$.

2. $g(x) = (2x+1)^3(x-4)$ sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 3\times 2\times(2x+1)^2(x-4)+(2x+1)^3\times 1 = (2x+1)^2\Big[6(x-4)+(2x+1)\Big] = \boxed{(2x+1)^2(8x-23)}$$

3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$:

$$h'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}(x+1) - \mathrm{e}^{2x}\times 1}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}(2x+2-1)}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{(2x+1)\,\mathrm{e}^{2x}}{(x+1)^2}}$$

4. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$:

$$k'(x) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times x - \sqrt{x^2+1}\times 1}{x^2} = \frac{\dfrac{x^2-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2} = \boxed{\frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}}$$

Ce qui nous donne au passage un résultat utile : k est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{1-\frac{1}{x}}$.

Le quotient des parenthèses tend vers 1, donc $f(x)$ se comporte comme x :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$$

2. En 1, le numérateur tend vers $4 > 0$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \boxed{+\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \boxed{-\infty}$$

On en déduit donc que $\boxed{x = 1 \text{ est asymptote verticale à la courbe de } f.}$

3. Pour tout $x \neq 1$, avec $u = x^2 + 3$ et $v = x - 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}}$$

Vérification de la factorisation : $(x-3)(x+1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3$. ✓

4. Le dénominateur $(x-1)^2$ est strictement positif pour $x \neq 1$: le signe de $f'(x)$ est donc celui du produit $(x-3)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	‖	↘	6	↗	$+\infty$

5. $f(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 3}{-1-1} = \dfrac{4}{-2} = \boxed{-2}$ (maximum local)

$f(3) = \dfrac{3^2 + 3}{3-1} = \dfrac{12}{2} = \boxed{6}$ (minimum local)

On remarque que le maximum local -2 est ici *inférieur* au minimum local 6 : c'est possible parce que la fonction n'est pas définie en 1, et que ces extremums sont seulement **locaux**.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. **Fausse**. On oublie le facteur u'. Avec $u(x) = x^2 + 1$, on a $u'(x) = 2x$ et

$$\left[(x^2+1)^5\right]' = 5 \times 2x \times (x^2+1)^4 = \boxed{10x(x^2+1)^4}$$

2. **Vraie**. Avec $u(x) = 3x$, $u'(x) = 3$, la formule $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$ donne bien $3\,\mathrm{e}^{3x}$.

3. **Fausse**. La formule correcte est $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$. *Contre-exemple :* avec $u(x) = x$, la dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$, alors que la formule proposée donnerait $-\frac{1}{1} = -1$.

4. **Fausse**. Il faut $u(x) > 0$ **strictement**. *Contre-exemple :* $u(x) = x$ sur $I = [0\,;+\infty[$ vérifie bien $u(x) \geqslant 0$, mais $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 (sa courbe y admet une tangente verticale).

5. **Vraie**. Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$: la condition $u > 0$ est satisfaite sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. **Fausse**. La formule correcte est $(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$. *Contre-exemple :* avec $f(t) = t^2$ et $u(x) = 2x$, on a $(f \circ u)(x) = 4x^2$ donc $(f \circ u)'(x) = 8x$; tandis que $f'(u'(x)) = f'(2) = 4$. Les deux expressions n'ont même pas la même nature : l'une dépend de x, l'autre non.

Convexité

EXERCICE 17 ⋆⋆

La courbe donnée est celle de f' : c'est une parabole tournée vers le haut, coupant l'axe des abscisses en -1 et en 3, et de sommet d'abscisse 1.

1. Par lecture graphique, $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]3\,;+\infty[$, et $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;3[$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$f(-1)$	↘	$f(3)$	↗	

   f admet donc un maximum local en -1 et un minimum local en 3.

2. Toujours graphiquement, $\boxed{f' \text{ est décroissante sur }]-\infty\,;1] \text{ et croissante sur } [1\,;+\infty[.}$

3. Le cours donne : f est convexe si et seulement si f' est croissante. On en déduit donc :

$$\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty\,;1] \text{ et convexe sur } [1\,;+\infty[.}$$

4. En $x = 1$, f' change de sens de variation, donc f'' y change de signe : la courbe de f admet $\boxed{\text{un point d'inflexion d'abscisse 1.}}$

5. **Non, ce ne sont pas les mêmes abscisses.** Les extremums de f se lisent là où f' *s'annule* ($x = -1$ et $x = 3$), c'est-à-dire là où la parabole coupe l'axe des abscisses. Le point d'inflexion se lit là où f' atteint son *extremum* ($x = 1$), c'est-à-dire au sommet de la parabole. Confondre $f'(x) = 0$ et $f''(x) = 0$ est l'erreur la plus courante du chapitre.

EXERCICE 18 ⋆

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 2$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$ puis

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

f'' est négative sur $]-\infty\,;2]$ et positive sur $[2\,;+\infty[$, en changeant de signe en 2 :

$$\boxed{f \text{ concave sur }]-\infty\,;2],\ \text{convexe sur } [2\,;+\infty[,\ \text{point d'inflexion en } x = 2\ (f(2) = -8).}$$

b) $f(x) = x^4 - 2x^3$: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ puis

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$$

Ce produit est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles :

$$\boxed{f \text{ convexe sur }]-\infty\,;0] \text{ et } [1\,;+\infty[,\ \text{concave sur } [0\,;1],\ \text{deux points d'inflexion en 0 et 1.}}$$

avec $f(0) = 0$ et $f(1) = -1$.

c) $f(x) = -x^3 + 3x + 1$: $f'(x) = -3x^2 + 3$ puis $f''(x) = -6x$, du signe contraire de x :

$$\boxed{f \text{ convexe sur }]-\infty\,;0],\ \text{concave sur } [0\,;+\infty[,\ \text{point d'inflexion en } 0\ (f(0)=1).}$$

d) $f(x) = x^4 + 2$: $f'(x) = 4x^3$ puis $f''(x) = 12x^2$.
Un carré étant toujours positif, $f''(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire. On a bien $f''(0) = 0$, et pourtant la courbe n'admet **aucun point d'inflexion** : la dérivée seconde s'annule *sans changer de signe*. La condition du cours est bien « f'' s'annule **en changeant de signe** » — s'annuler ne suffit pas.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Sur les quatre figures qui suivent, les portions convexes de la courbe sont tracées en bleu ardoise, les portions concaves en violet, et les points d'inflexion sont marqués d'un point noir.

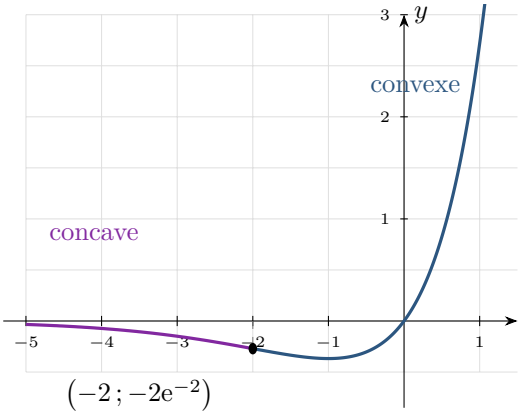
1. $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$: $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$, puis

$$f''(x) = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\,\mathrm{e}^x$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de f'' est celui de $x + 2$:

$$\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty\,;-2] \text{ et convexe sur } [-2\,;+\infty[.}$$

La courbe admet un point d'inflexion en $x = -2$, d'ordonnée $f(-2) = -2\mathrm{e}^{-2}$.

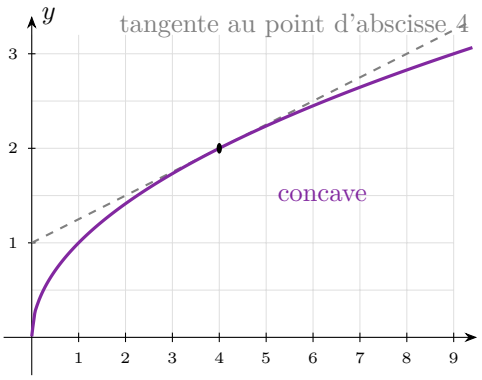


2. $g(x) = \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. On dérive $\dfrac{1}{u}$ avec $u = \sqrt{x}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \qquad \text{donc} \qquad g''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

Pour $x > 0$, $g''(x) < 0$:

$$\boxed{g \text{ est concave sur }]0\,;+\infty[,\ \text{sans point d'inflexion.}}$$

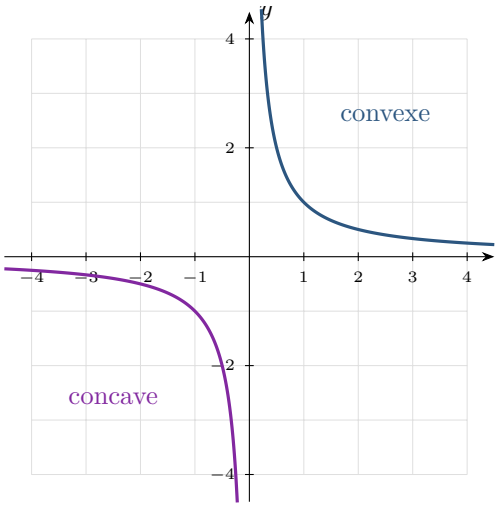


On a ajouté en pointillés gris la tangente au point d'abscisse 4 : conformément à la définition, la courbe reste **en dessous** de sa tangente, ce qui est bien la traduction géométrique de la concavité.

3. $h(x) = \dfrac{1}{x}$: $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ puis $h''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, du signe de x :

$$\boxed{h \text{ est convexe sur }]0\,;+\infty[\text{ et concave sur }]-\infty\,;0[.}$$

Attention : il n'y a **pas** de point d'inflexion en 0, car 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition. On ne peut pas parler de changement de convexité « en traversant » une valeur où la fonction n'existe pas.



La figure rend cette remarque très visible : les deux branches ne se rejoignent pas, il ne s'agit pas d'une courbe qui *traverse* sa tangente en changeant de convexité.

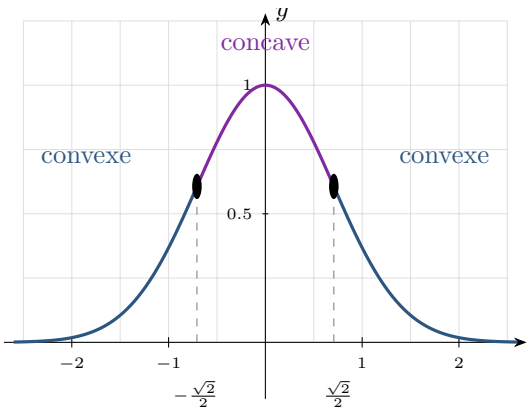
4. $k(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$: $k'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, puis, avec la formule du produit :

$$k''(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} + (-2x) \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = \left(4x^2 - 2\right)\mathrm{e}^{-x^2} = 2\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$$

Le signe est celui de $2x^2 - 1$, qui s'annule en $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\boxed{k \text{ convexe sur } \left]-\infty\,;-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ et } \left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[, \text{ concave entre les deux.}}$$

La courbe admet donc deux points d'inflexion, d'abscisses $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et d'ordonnée commune $\mathrm{e}^{-1/2} \approx 0{,}607$.



C'est la célèbre « courbe en cloche » : elle est concave au voisinage de son sommet, puis convexe de part et d'autre, les deux changements de convexité se produisant exactement aux abscisses $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$ donne $f'(x) = \mathrm{e}^x$ puis $f''(x) = \mathrm{e}^x$. Or l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f''(x) > 0$ et

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$$

2. $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'(0) = 1$, donc :

$$y = 1 \times (x - 0) + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T : y = x + 1}$$

3. Le cours définit une fonction convexe comme une fonction dont la courbe est située au-dessus de *chacune* de ses tangentes. On en déduit donc, sans aucun calcul :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x, \quad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1}$$

4. Posons $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. Alors $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, et

$$g'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$$

La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$: elle atteint son minimum en 0, et

$$g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$$

Ainsi $g(x) \geqslant g(0) = 0$ pour tout réel x, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$: on retrouve bien l'inégalité précédente.

5. L'inégalité appliquée en $x = 0{,}1$ donne une **minoration** :

$$\mathrm{e}^{0{,}1} \geqslant 1 + 0{,}1 = 1{,}1$$

Pour obtenir une majoration, on applique la même inégalité en $x = -0{,}1$:

$$\mathrm{e}^{-0{,}1} \geqslant 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\mathrm{e}^{0{,}1}} \geqslant 0{,}9 \quad \text{soit} \quad \mathrm{e}^{0{,}1} \leqslant \frac{1}{0{,}9} = \frac{10}{9}$$

$$\boxed{1{,}1 \leqslant \mathrm{e}^{0{,}1} \leqslant \frac{10}{9} \approx 1{,}111}$$

La calculatrice donne $\mathrm{e}^{0{,}1} \approx 1{,}10517$: l'encadrement est correct, et la minoration 1,1 est déjà excellente (erreur inférieure à 6×10^{-3}).

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}5x^2 + 20x$ donne :

$$C'(x) = 0{,}15x^2 - 3x + 20$$

C'est un trinôme du second degré de discriminant

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 0{,}15 \times 20 = 9 - 12 = -3 < 0$$

Un trinôme de discriminant strictement négatif ne s'annule jamais et garde le signe de son coefficient dominant, ici $0{,}15 > 0$. Donc $C'(x) > 0$ pour tout x, et

$$\boxed{C \text{ est strictement croissante sur } [0\,;30].}$$

Interprétation : produire davantage coûte toujours plus cher au total, ce qui était attendu.

2. $C''(x) = 0{,}3x - 3 = 0{,}3(x - 10)$, qui s'annule en 10 en changeant de signe.

x	0		10		30
$C''(x)$		$-$	0	$+$	
C'	20	↘	5	↗	65

3. On en déduit donc :

$$\boxed{C \text{ est concave sur } [0\,;10] \text{ et convexe sur } [10\,;30], \text{ avec un point d'inflexion en } x = 10.}$$

On calcule $C(10) = 0{,}05 \times 1000 - 1{,}5 \times 100 + 200 = 50 - 150 + 200 = 100$: le point d'inflexion est le point de coordonnées $(10\,;100)$.

4. D'après le tableau ci-dessus, C' est décroissante puis croissante, et atteint donc son minimum en $x = 10$:

$$C'(10) = 0{,}15 \times 100 - 30 + 20 = 15 - 30 + 20 = \boxed{5}$$

Le coût marginal est minimal pour une production de $\boxed{10 \text{ centaines, soit } 1\,000 \text{ objets}}$, et vaut alors 5 centaines d'euros par centaine d'objets supplémentaire.

5. **Interprétation économique.** Avant $x = 10$, la fonction coût est concave : chaque centaine d'objets supplémentaire coûte *moins cher* que la précédente — l'entreprise bénéficie de rendements croissants (les frais fixes se répartissent, l'organisation se rode). Après $x = 10$, la fonction devient convexe : chaque centaine supplémentaire coûte *plus cher* que la précédente — heures supplémentaires, saturation des machines, rendements décroissants. Le point d'inflexion marque donc le seuil de production le plus efficace à la marge.

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

EXERCICE 22 ⋆

1. **Vraie**. C'est la seconde partie de la proposition 4 du cours : la dérivabilité entraîne la continuité.
2. **Fausse**. C'est la réciproque de la précédente, et elle est fausse. *Contre-exemple :* la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 0 (point anguleux).
3. **Fausse**. La fonction partie entière est discontinue en *chaque* entier : sa courbe est un escalier dont chaque marche impose de lever le crayon. Elle est en revanche continue sur tout intervalle $[n\,;n+1[$.
4. **Vraie**. Une fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition. *Attention à la formulation :* $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, mais il serait incorrect de dire qu'elle est continue « sur $\mathbb{R}^*$ » vu comme un seul bloc.
5. **Vraie**. C'est le théorème des valeurs intermédiaires appliqué avec $k = 0$: si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
6. **Fausse**. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit **au moins** une solution, jamais l'unicité. *Contre-exemple :* $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-2\,;2]$ avec $k = 0$ admet trois solutions (voir l'exercice suivant). *Énoncé correct :* il faut ajouter que f est strictement monotone sur $[a\,;b]$ — c'est le corollaire.

EXERCICE 23 ⋆

1. f est une fonction polynôme, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
2. On calcule :
   - $f(-2) = -8 + 6 + 1 = \boxed{-1}$
   - $f(0) = \boxed{1}$
   - $f(1) = 1 - 3 + 1 = \boxed{-1}$
   - $f(2) = 8 - 6 + 1 = \boxed{3}$
3. On applique trois fois le théorème des valeurs intermédiaires, sur trois intervalles distincts :
   - Sur $[-2\,;0]$: f est continue et $f(-2) = -1 < 0 < 1 = f(0)$, donc il existe $c_1 \in]-2\,;0[$ tel que $f(c_1) = 0$.
   - Sur $[0\,;1]$: f est continue et $f(1) = -1 < 0 < 1 = f(0)$, donc il existe $c_2 \in]0\,;1[$ tel que $f(c_2) = 0$.
   - Sur $[1\,;2]$: f est continue et $f(1) = -1 < 0 < 3 = f(2)$, donc il existe $c_3 \in]1\,;2[$ tel que $f(c_3) = 0$.

   Ces trois intervalles ouverts étant disjoints, les solutions c_1, c_2 et c_3 sont deux à deux distinctes :

   $$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet au moins trois solutions.}}$$
4. **Non.** Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'*existence* : il ne dit rien du nombre de solutions. Pour conclure qu'il y en a exactement trois, il faut invoquer le **corollaire**, donc établir la stricte monotonie de f sur chaque intervalle. Ici :

   $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

   donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$, strictement décroissante sur $[-1\,;1]$, puis strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. Sur chacune de ces trois branches, l'équation $f(x) = 0$ admet au plus une solution : il y en a donc exactement trois.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. f est une fonction polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

   $$f'(x) = 3x^2 + 3$$

   Comme $3x^2 \geqslant 0$, on a $f'(x) \geqslant 3 > 0$ pour tout réel x, donc

   $$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$
2. $f(x) = x^3 + 3x - 5 = x^3\left(1 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x^3}\right)$, la parenthèse tendant vers 1 :

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$
3. On rédige les trois vérifications de la méthode :
   (a) f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme, donc dérivable donc continue).
   (b) f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ (question 1.).
   (c) Le réel 0 est **compris entre les limites** de f aux bornes, à savoir $-\infty$ et $+\infty$.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

   $$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

4. $f(1) = 1 + 3 - 5 = -1 < 0$ et $f(2) = 8 + 6 - 5 = 9 > 0$. Comme f est strictement croissante et s'annule en α, on a nécessairement $\boxed{\alpha \in]1\,;2[}$.

5. Balayage à la calculatrice, de pas 0,1 puis 0,01 :

$$f(1{,}1) \approx -0{,}369 < 0 \qquad \text{et} \qquad f(1{,}2) \approx 0{,}328 > 0 \qquad \text{donc} \qquad \alpha \in]1{,}1\,;1{,}2[$$

$$f(1{,}15) \approx -0{,}029 < 0 \qquad \text{et} \qquad f(1{,}16) \approx 0{,}041 > 0$$

$$\boxed{1{,}15 < \alpha < 1{,}16}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

On raisonne branche par branche. Sur chacune des trois branches, f est continue et **strictement** monotone : le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique, et l'équation $f(x) = k$ y admet une solution si et seulement si k appartient à l'intervalle image, auquel cas cette solution est unique.

Les trois intervalles images sont :

$$\text{branche 1 : }]-\infty\,;4] \qquad \text{branche 2 : } [-2\,;4] \qquad \text{branche 3 : } [-2\,;+\infty[$$

1. $k = 0$: on a $0 \in]-\infty\,;4]$, $0 \in [-2\,;4]$ et $0 \in [-2\,;+\infty[$. Chaque branche fournit exactement une solution :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet 3 solutions.}}$$

2. $k = 5$: $5 > 4$, donc 5 n'appartient ni à l'image de la branche 1, ni à celle de la branche 2. Il appartient en revanche à $[-2\,;+\infty[$:

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 5 \text{ admet 1 solution.}}$$

$k = -3$: $-3 < -2$, donc -3 n'appartient pas aux images des branches 2 et 3. Il appartient à $]-\infty\,;4]$:

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = -3 \text{ admet 1 solution.}}$$

3. $k = 4$: la valeur 4 est **atteinte**, en $x = -1$. Sur la branche 1, f croît strictement de $-\infty$ jusqu'à 4 : la valeur 4 n'y est atteinte qu'à l'extrémité $x = -1$. Sur la branche 2, f décroît de 4 à -2 : elle vaut 4 au point de départ, qui est *le même* $x = -1$ — cette solution ne doit pas être comptée deux fois. Sur la branche 3, f croît de -2 à $+\infty$ et $4 \in]-2\,;+\infty[$: une solution supplémentaire.

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 4 \text{ admet 2 solutions.}}$$

4. $k = -2$: cette valeur est le minimum, atteint en $x = 3$, qui est commun aux branches 2 et 3 (donc une seule solution pour ces deux branches). Sur la branche 1, $-2 \in]-\infty\,;4]$ donne une solution supplémentaire.

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = -2 \text{ admet 2 solutions.}}$$

5. **Non.** Le tableau de variations renseigne sur le *signe* de f', mais absolument pas sur les *variations* de f', donc pas sur le signe de f''. Or ce sont les changements de signe de f'' qui donnent les points d'inflexion. Pour répondre, il faudrait disposer du tableau de variations de f', ou du tableau de signes de f''.

   Piège classique : on a envie de répondre « il y a un point d'inflexion entre le maximum et le minimum ». C'est vraisemblable, mais nullement démontrable à partir de ce seul tableau — et le nombre exact de points d'inflexion peut être bien plus grand.

EXERCICE 26 - PYTHON ⋆⋆

1. La variable `x` part de 1 et progresse de 0,1 tant que $f(x)$ reste strictement négative :

$$f(1) = -1 < 0 \quad \to \quad f(1{,}1) \approx -0{,}369 < 0 \quad \to \quad f(1{,}2) \approx 0{,}328 > 0 \quad \text{: arrêt}$$

La fonction renvoie alors le couple `(x - p, x)`, soit :

$$\boxed{\texttt{balayage(1, 2, 0.1)} \text{ renvoie } (1{,}1\,;1{,}2)}$$

ce qui signifie que α appartient à l'intervalle $[1{,}1\,;1{,}2]$.

Remarque d'informatique : en pratique, Python affichera plutôt

```
(1.1000000000000003, 1.2000000000000004)
```

Les nombres décimaux sont codés de façon approchée en machine, et l'accumulation d'additions de 0,1 fait apparaître ces écarts minuscules. Cela ne change rien à l'interprétation mathématique.

2. La boucle s'arrête parce que f est strictement croissante et tend vers $+\infty$: au-delà de α, f est strictement positive. Comme `x` augmente de $p > 0$ à chaque tour, elle finit par dépasser α en un nombre fini d'étapes, et la condition `f(x) < 0` devient alors fausse. **C'est la stricte croissance établie à l'exercice 24 qui garantit qu'une fois la condition devenue fausse, elle le reste** — sans elle, la boucle pourrait s'arrêter sur un changement de signe qui n'est pas le bon.

3. Il suffit de réduire le pas :

$$\boxed{\texttt{balayage(1, 2, 0.001)}}$$

4. On ajoute la condition d'arrêt sur `b` :

```
def balayage(a, b, p):
    x = a
    while f(x) < 0 and x <= b:
        x = x + p
    if x > b:
        return None       # aucun changement de signe detecte sur [a ; b]
    return x - p, x
```

5. Sur $[1\,;2]$ avec un pas $p = 10^{-3}$, la boucle teste au maximum

$$\frac{2-1}{10^{-3}} = \boxed{1\,000 \text{ valeurs}}$$

et pour $p = 10^{-6}$, jusqu'à $\boxed{1\,000\,000 \text{ valeurs}}$.
Ce procédé n'est pas économe du tout : pour gagner un chiffre décimal, il faut multiplier le nombre de calculs par 10. C'est précisément ce que la dichotomie va corriger.

EXERCICE 27 : MÉTHODE DE DICHOTOMIE ⋆⋆

Partie A : le principe, à la main

1. f est continue sur $[1\,;2]$ (fonction polynôme) et $f(1) = -1 < 0 < 9 = f(2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]1\,;2[$; et comme f est strictement croissante, cette solution est unique. Donc $\boxed{\alpha \in]1\,;2[.}$

2. $f(1{,}5) = 1{,}5^3 + 3 \times 1{,}5 - 5 = 3{,}375 + 4{,}5 - 5 = \boxed{2{,}875 > 0}$
Cette valeur est du *même signe* que $f(2)$, et de signe contraire à $f(1)$: le changement de signe a donc lieu entre 1 et 1,5. On en déduit donc que

$$\boxed{\alpha \in]1\,;1{,}5[\qquad \text{amplitude : } 0{,}5}$$

3. On poursuit, en calculant à chaque étape le milieu puis le signe de son image :

n	a_n	b_n	m_n	signe de $f(m_n)$	amplitude $b_n - a_n$
0	1	2	1,5	$+$ (2,875)	1
1	1	1,5	1,25	$+$ (0,703)	0,5
2	1	1,25	1,125	$-$ ($-0{,}201$)	0,25
3	1,125	1,25	1,1875	$+$ (0,237)	0,125
4	1,125	1,1875	1,15625	$+$ (0,015)	0,0625

Règle de mise à jour : si $f(m_n) < 0$, alors $\alpha > m_n$ (car f est croissante) et l'on remplace a_n par m_n ; si $f(m_n) > 0$, alors $\alpha < m_n$ et l'on remplace b_n par m_n.

4. Après 4 étapes :

$$\boxed{1{,}125 < \alpha < 1{,}1875 \qquad \text{d'amplitude} \qquad 0{,}0625 = \frac{1}{16}}$$

Vérification : on avait trouvé $\alpha \approx 1{,}155$ à l'exercice 24, ce qui appartient bien à cet intervalle. ✓

Partie B : pourquoi cela fonctionne, et à quelle vitesse

5. À chaque étape, on conserve exactement l'une des deux moitiés de $[a_n\,;b_n]$, donc

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

La suite des amplitudes est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $b_0 - a_0 = 2 - 1 = 1$. On en déduit donc que

$$\boxed{b_n - a_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}}$$

6. **Le théorème des valeurs intermédiaires** sert à garantir qu'un changement de signe entraîne la présence d'une racine : c'est lui qui autorise, à chaque étape, à affirmer que la moitié conservée contient bien α. **La stricte monotonie** sert à garantir que cette racine est *unique*, donc que les deux moitiés ne peuvent pas en contenir chacune une, et que l'intervalle conservé est bien le bon.

Sans continuité, tout s'effondre : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[-1\,;1]$ vérifie $f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$, et pourtant elle ne s'annule jamais. La dichotomie appliquée à cette fonction convergerait vers 0, qui n'est pas une racine mais un point de discontinuité.

7. On cherche le plus petit entier n tel que $\dfrac{1}{2^n} < 10^{-2}$, c'est-à-dire $2^n > 100$. Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$, donc $\boxed{n = 7}$.

De même, $\dfrac{1}{2^n} < 10^{-3}$ équivaut à $2^n > 1\,000$. Or $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1\,024$, donc $\boxed{n = 10}$.

8. La dichotomie demande $\boxed{\text{10 calculs de } f}$ pour une précision de 10^{-3}, contre jusqu'à 1 000 pour le balayage.

Commentaire. Le balayage divise l'amplitude par 10 au prix de 10 fois plus de calculs : le coût est *proportionnel* à la précision. La dichotomie, elle, divise l'amplitude par 2 à chaque calcul supplémentaire : gagner un chiffre décimal ne coûte que 3 ou 4 étapes de plus. C'est la différence entre une croissance linéaire et une croissance exponentielle du gain de précision.

9. **La méthode n'échoue pas.** À chaque étape, le signe de $f(m_n)$ est soit celui de $f(a_n)$, soit celui de $f(b_n)$: dans les deux cas, l'une au moins des deux moitiés présente encore un changement de signe, et c'est celle que l'on conserve. Le procédé converge donc vers *une* racine.

   En revanche, on ne contrôle pas laquelle des trois racines on obtient : cela dépend entièrement des valeurs des milieux successifs. C'est bien la stricte monotonie, et elle seule, qui garantissait jusqu'ici que la racine trouvée était *la* racine.

Partie C : mise en œuvre en Python

10. Comme f est croissante, $f(m) < 0$ signifie $m < \alpha$: c'est donc la borne *gauche* que l'on remonte. Dans le cas contraire, on abaisse la borne droite.

```
def dichotomie(a, b, e):
    while b - a >= e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

11. À chaque tour de boucle, la quantité `b - a` est divisée par 2 : elle vaut $\dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ après n tours. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0, elle finit par devenir strictement inférieure à `e`, et la condition du `while` devient fausse. La boucle se termine donc toujours.

12. Il suffit d'ajouter un compteur :

```
def dichotomie(a, b, e):
    n = 0
    while b - a >= e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
        n = n + 1
    return a, b, n
```

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. (a) Sur $]-\infty\,;2[$, f coïncide avec la fonction polynôme $x \mapsto x^2+1$, donc f y est continue. Sur $]2\,;+\infty[$, f coïncide avec la fonction affine $x \mapsto ax-3$, donc f y est également continue, et ce quelle que soit la valeur de a.
   Le seul point susceptible de poser problème est donc $x = 2$, où l'expression change.

   (b) D'une part, comme la première expression est valable pour $x \leqslant 2$:

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$$

   D'autre part :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (ax - 3) = 2a - 3$$

   La fonction f est continue en 2 si et seulement si ces deux limites coïncident avec $f(2)$:

$$2a - 3 = 5 \iff 2a = 8 \iff \boxed{a = 4}$$

2. (a) Pour $x \neq 2$:

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \boxed{x+2}$$

(b) On en déduit que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$. La fonction g est continue en 2 si et seulement si $g(2) = \lim\limits_{x\to 2} g(x)$, c'est-à-dire

$$\boxed{m = 4}$$

On remarque que l'on a ainsi « prolongé par continuité » la fonction : avec $m = 4$, g n'est autre que la fonction affine $x \mapsto x + 2$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercices de synthèse

EXERCICE 29 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : limites et variations

1. Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction f est donc un quotient de fonctions polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas, d'où

$$\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

2. On factorise par le terme de plus haut degré :

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} = \frac{4x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0}$$

On en déduit donc que $\boxed{\text{la droite } y = 0 \text{ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à } \mathcal{C}_f.}$

3. Avec $u(x) = 4x$ et $v(x) = x^2 + 1$, donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2x$:

$$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{4(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}}$$

en utilisant $4 - 4x^2 = 4(1 - x^2) = 4(1 - x)(1 + x)$.

4. Le dénominateur est un carré strictement positif : le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x)(1 + x)$, qui est positif *entre* ses racines -1 et 1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	-2	↗	2	↘	0

avec $f(-1) = \dfrac{-4}{2} = -2$ et $f(1) = \dfrac{4}{2} = 2$.

5. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{4 \times 1 \times 1}{1} = 4$, donc la tangente en 0 a pour équation :

$$y = 4(x - 0) + 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = 4x}$$

Partie B : convexité

6. On dérive $f'(x) = \dfrac{4 - 4x^2}{(x^2+1)^2}$, avec $u(x) = 4 - 4x^2$ et $v(x) = (x^2+1)^2$, donc $u'(x) = -8x$ et $v'(x) = 2 \times 2x \times (x^2+1) = 4x(x^2+1)$:

$$f''(x) = \frac{-8x(x^2+1)^2 - (4 - 4x^2) \times 4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

On factorise le numérateur par (x^2+1), puis on simplifie :

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)\Big[-8x(x^2+1) - 4x(4 - 4x^2)\Big]}{(x^2+1)^4} = \frac{-8x^3 - 8x - 16x + 16x^3}{(x^2+1)^3} = \boxed{\frac{8x\left(x^2-3\right)}{(x^2+1)^3}}$$

7. Le dénominateur est strictement positif. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de :

$$8x(x^2 - 3) = 8x\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$8x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

8. On en déduit donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est concave sur } \left]-\infty\,;-\sqrt{3}\right] \text{ et sur } \left[0\,;\sqrt{3}\right]; \\ f \text{ est convexe sur } \left[-\sqrt{3}\,;0\right] \text{ et sur } \left[\sqrt{3}\,;+\infty\right[. \end{array}}$$

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en trois valeurs, donc

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet trois points d'inflexion, d'abscisses } -\sqrt{3},\ 0 \text{ et } \sqrt{3}.}$$

Leurs ordonnées sont respectivement $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$, car $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Partie C : une équation

9. On examine les trois branches du tableau de variations :
   - Sur $]-\infty\,;-1]$, f décroît de 0 à -2 : toutes les valeurs prises sont négatives ou nulles, donc 1 n'est jamais atteint.
   - Sur $[-1\,;1]$, f est continue et strictement croissante de -2 à 2. Comme $1 \in]-2\,;2[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne **exactement une** solution.
   - Sur $[1\,;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante de 2 à 0. Comme $1 \in]0\,;2[$, il y a là encore **exactement une** solution.

$$\boxed{\text{l'équation } f(x)=1 \text{ admet exactement deux solutions dans } \mathbb{R}.}$$

10. Comme x^2+1 ne s'annule jamais, on peut multiplier les deux membres par ce dénominateur :

$$\frac{4x}{x^2+1}=1 \iff 4x=x^2+1 \iff x^2-4x+1=0$$

Le discriminant vaut $\Delta=16-4=12>0$, et $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, d'où :

$$x=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3} \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{2-\sqrt{3}\ ;\ 2+\sqrt{3}\right\}}$$

Cohérence : $2-\sqrt{3}\approx 0{,}27$ appartient bien à $]-1\,;1[$, et $2+\sqrt{3}\approx 3{,}73$ appartient bien à $]1\,;+\infty[$. On retrouve bien deux solutions, une par branche, conformément à la question 9.

EXERCICE 30 - TYPE BAC ⋆⋆

1. $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est un produit uv avec $u(x)=x+2$ et $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$, donc $u'(x)=1$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$:

$$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+(x+2)\times(-\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{e}^{-x}(1-x-2)=\boxed{(-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}}$$

Piège classique : la dérivée de e^{-x} est $-\mathrm{e}^{-x}$, et non e^{-x} — c'est le facteur $u'=-1$.

2. Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$, qui s'annule en -1 et est positif pour $x<-1$:

x	-2		-1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	e	↘	$6\mathrm{e}^{-4}$

avec $f(-2)=0\times\mathrm{e}^2=0$, $f(-1)=1\times\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ et $f(4)=6\,\mathrm{e}^{-4}$.

3. $f(0)=2\times\mathrm{e}^0=2$ et $f'(0)=(-0-1)\mathrm{e}^0=-1$, donc :

$$y=-1\times(x-0)+2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T:\ y=-x+2}$$

4. On dérive $f'(x)=(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$, encore un produit :

$$f''(x)=(-1)\times\mathrm{e}^{-x}+(-x-1)\times(-\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{e}^{-x}(-1+x+1)=\boxed{x\,\mathrm{e}^{-x}}$$

Le signe de f'' est celui de x, d'où :

$$\boxed{f \text{ est concave sur } [-2\,;0] \text{ et convexe sur } [0\,;4].}$$

5. La dérivée seconde s'annule en 0 en changeant de signe, donc la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 0, et $f(0)=2$:

$$\boxed{\text{le point d'inflexion a pour coordonnées } (0\,;2).}$$

On remarque que c'est précisément le point de contact de la tangente T : en ce point, la courbe traverse sa tangente.

6. On examine les deux branches, en gardant en tête que $\mathrm{e} \approx 2{,}718$ et $6\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}110$:
   - Sur $[-2\,;-1]$, f est continue et strictement croissante de 0 à e. Comme $1 \in]0\,;\mathrm{e}[$, il existe une unique solution α.
   - Sur $[-1\,;4]$, f est continue et strictement décroissante de e à $6\mathrm{e}^{-4}$. Comme $1 \in]6\mathrm{e}^{-4}\,;\mathrm{e}[$, il existe une unique solution β.

   $$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 1 \text{ admet exactement deux solutions sur } [-2\,;4].}$$

   À la calculatrice :

   $$f(-1{,}85) \approx 0{,}954 < 1 \quad \text{et} \quad f(-1{,}84) \approx 1{,}007 > 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{-1{,}85 < \alpha < -1{,}84}$$

   $$f(1{,}14) \approx 1{,}004 > 1 \quad \text{et} \quad f(1{,}15) \approx 0{,}997 < 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{1{,}14 < \beta < 1{,}15}$$

EXERCICE 31 - TYPE BAC ⋆⋆

1. La longueur découpée doit être positive, donc $x \geqslant 0$. De plus, on découpe un carré de côté x à *chaque* extrémité d'un côté de 20 cm : il faut donc $2x \leqslant 20$, c'est-à-dire $x \leqslant 10$. D'où $\boxed{x \in [0\,;10].}$
   On remarque que les deux bornes correspondent à des cas dégénérés : pour $x = 0$ la boîte est plate, pour $x = 10$ il ne reste plus de fond. Dans les deux cas le volume est nul.
2. Après découpe et pliage, la base est un carré de côté $20 - 2x$ et la hauteur vaut x :

   $$V(x) = \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = \boxed{x(20-2x)^2}$$

3. On dérive le produit uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = (20-2x)^2$. La dérivée de v s'obtient par la formule $(u^2)' = 2u'u$, avec ici une fonction intérieure de dérivée -2 :

   $$v'(x) = 2 \times (-2) \times (20-2x) = -4(20-2x)$$

   Ce qui nous donne :

   $$V'(x) = 1 \times (20-2x)^2 + x \times \big(-4(20-2x)\big) = (20-2x)\Big[(20-2x) - 4x\Big] = \boxed{(20-2x)(20-6x)}$$

4. Sur $[0\,;10]$, on a $20 - 2x \geqslant 0$ (nul seulement en $x = 10$), donc le signe de V' est celui de $20 - 6x$, qui s'annule en $x = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3}$:

x	0		$\frac{10}{3}$		10
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
V	0	↗	$\frac{16\,000}{27}$	↘	0

5. Le volume est maximal pour $\boxed{x = \dfrac{10}{3} \text{ cm}}$, et vaut alors :

   $$V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{3} \times \left(20 - \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \times \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \times \frac{1\,600}{9} = \boxed{\frac{16\,000}{27} \approx 593 \text{ cm}^3}$$

6. Comme $400 < \dfrac{16\,000}{27} \approx 592{,}6$, on applique le corollaire sur chaque branche :

- sur $\left[0\,;\frac{10}{3}\right]$, V est continue et strictement croissante de 0 à 592,6, et 400 appartient à cet intervalle : une unique solution ;
- sur $\left[\frac{10}{3}\,;10\right]$, V est continue et strictement décroissante de 592,6 à 0 : une unique solution.

$$\boxed{\text{l'équation } V(x)=400 \text{ admet exactement deux solutions.}}$$

À la calculatrice, $V(1{,}3)\approx 393{,}6$ et $V(1{,}4)\approx 414{,}2$, puis $V(5{,}8)\approx 409{,}3$ et $V(5{,}9)\approx 396{,}8$:

$$\boxed{1{,}3<x_1<1{,}4 \qquad \text{et} \qquad 5{,}8<x_2<5{,}9}$$

7. En développant, $V(x)=x\left(400-80x+4x^2\right)=4x^3-80x^2+400x$, d'où :

$$V'(x)=12x^2-160x+400 \qquad \text{puis} \qquad V''(x)=24x-160$$

Vérification : en développant $(20-2x)(20-6x)=400-120x-40x+12x^2=12x^2-160x+400$.
$V''(x)$ s'annule en $x=\dfrac{160}{24}=\dfrac{20}{3}$, en changeant de signe :

$$\boxed{V \text{ est concave sur } \left[0\,;\tfrac{20}{3}\right],\ \text{convexe sur } \left[\tfrac{20}{3}\,;10\right],\ \text{point d'inflexion en } x=\frac{20}{3}.}$$

EXERCICE 32 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

1. $g(x)=x^3+2x^2-2$ donne :

$$g'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)$$

Sur $[0\,;+\infty[$, on a $x\geqslant 0$ et $3x+4\geqslant 4>0$, donc $g'(x)\geqslant 0$, et $g'(x)=0$ uniquement en $x=0$. Ainsi

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[.}$$

2. $g(0)=0+0-2=\boxed{-2}$, et

$$g(x)=x^3\left(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}\right)\longrightarrow+\infty \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to+\infty}g(x)=\boxed{+\infty}$$

3. g est continue sur $[0\,;+\infty[$ (fonction polynôme), strictement croissante, et 0 est compris entre $g(0)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{\text{l'équation } g(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [0\,;+\infty[.}$$

4. $g(0{,}8)=0{,}512+1{,}28-2=-0{,}208<0$ et $g(0{,}9)=0{,}729+1{,}62-2=0{,}349>0$, donc $\boxed{\alpha\in\,]0{,}8\,;0{,}9[.}$
En affinant : $g(0{,}83)\approx -0{,}050<0$ et $g(0{,}84)\approx 0{,}004>0$, d'où

$$\boxed{0{,}83<\alpha<0{,}84}$$

5. g étant strictement croissante et s'annulant en α :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B : étude de la fonction f

6. Lorsque $x \to 0^+$: $x^2 + 4x \to 0$ tandis que $\dfrac{4}{x} \to +\infty$ (numérateur $4 > 0$, dénominateur $\to 0^+$). Donc

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \boxed{+\infty}$$

Lorsque $x \to +\infty$: $x^2 + 4x \to +\infty$ et $\dfrac{4}{x} \to 0$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

On en déduit donc que $\boxed{\text{la droite } x = 0 \text{ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à } \mathcal{C}_f.}$

7. $f(x) = x^2 + 4x + 4x^{-1}$, dont la dérivée terme à terme donne :

$$f'(x) = 2x + 4 - \frac{4}{x^2}$$

On réduit au même dénominateur x^2 :

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 4}{x^2} = \frac{2\left(x^3 + 2x^2 - 2\right)}{x^2} = \boxed{\frac{2\,g(x)}{x^2}}$$

8. Pour $x > 0$, $x^2 > 0$ et $2 > 0$: le signe de $f'(x)$ est donc **exactement celui de** $g(x)$, déterminé à la question 5.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

9. D'après ce tableau, f est décroissante puis croissante : elle admet donc un **minimum global** sur $]0\,;+\infty[$, atteint en α.
Comme $0{,}83 < \alpha < 0{,}84$, on encadre :

$$f(0{,}83) \approx 8{,}828 \qquad \text{et} \qquad f(0{,}84) \approx 8{,}827$$

$$\boxed{f(\alpha) \approx 8{,}8}$$

10. On dérive $f'(x) = 2x + 4 - 4x^{-2}$. Pour le dernier terme, on applique $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2$:

$$\left(\frac{4}{x^2}\right)' = -\frac{4 \times 2x}{x^4} = -\frac{8}{x^3} \qquad \text{donc} \qquad f''(x) = 2 - \left(-\frac{8}{x^3}\right) = \boxed{2 + \frac{8}{x^3}}$$

Pour $x > 0$, on a $\dfrac{8}{x^3} > 0$, donc $f''(x) > 2 > 0$:

$$\boxed{f \text{ est convexe sur }]0\,;+\infty[, \text{ et } \mathcal{C}_f \text{ n'admet aucun point d'inflexion.}}$$

11. On sait que $f(1) = 1 + 4 + 4 = 9$, et que $f(\alpha)$ est le minimum de f, donc $f(\alpha) \leqslant 9 < 10$. On applique alors le corollaire sur chaque branche :
    - sur $]0\,;\alpha]$, f est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $f(\alpha) < 10$: une unique solution ;
    - sur $[\alpha\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de $f(\alpha) < 10$ à $+\infty$: une unique solution.

    $$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 10 \text{ admet exactement deux solutions sur }]0\,;+\infty[.}$$

EXERCICE 33 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : étude d'une fonction

1. Pour $x \geqslant 0$, on a $4x + 5 \geqslant 5 > 0$: la fonction $u : x \mapsto 4x + 5$ est strictement positive, donc $\sqrt{u}$ est dérivable, et
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{4x+5}}}$$
Ce quotient est strictement positif, donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[.}$

2. Pour $x \geqslant 0$, les deux membres de $\sqrt{4x+5} = x$ sont positifs, on peut donc élever au carré :
$$\sqrt{4x+5} = x \iff 4x + 5 = x^2 \iff x^2 - 4x - 5 = 0$$
Le discriminant vaut $\Delta = 16 + 20 = 36$, donc $\sqrt{\Delta} = 6$ et
$$x = \frac{4-6}{2} = -1 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{4+6}{2} = 5$$
La valeur -1 est à rejeter car elle n'appartient pas à $[0\,;+\infty[$:
$$\boxed{\mathcal{S} = \{5\}}$$

3. Soit $x \in [0\,;5]$. Comme f est croissante, on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(5)$, c'est-à-dire :
$$\sqrt{5} \leqslant f(x) \leqslant 5$$
Or $\sqrt{5} \approx 2{,}24 \geqslant 0$, donc a fortiori
$$\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 5}$$
Ce qui signifie que l'intervalle $[0\,;5]$ est **stable** par f : on ne peut pas en sortir en appliquant f.

4. On multiplie par la quantité conjuguée, licite car $\sqrt{4x+5} + x > 0$ pour $x > 0$:
$$f(x) - x = \sqrt{4x+5} - x = \frac{\left(\sqrt{4x+5} - x\right)\left(\sqrt{4x+5} + x\right)}{\sqrt{4x+5} + x} = \frac{(4x+5) - x^2}{\sqrt{4x+5} + x}$$
Or $-x^2 + 4x + 5 = -\left(x^2 - 4x - 5\right) = -(x-5)(x+1)$ d'après la question 2. Ce qui nous donne :
$$\boxed{f(x) - x = \frac{-(x-5)(x+1)}{\sqrt{4x+5} + x}}$$
Sur $[0\,;5]$, on a $x - 5 \leqslant 0$ et $x + 1 > 0$, donc $-(x-5)(x+1) \geqslant 0$; le dénominateur étant strictement positif :
$$\boxed{f(x) \geqslant x \text{ pour tout } x \in [0\,;5], \text{ avec égalité seulement en } x = 5.}$$

5. $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}} = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{4x+5}}$. On dérive $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = \sqrt{4x+5}$, dont la dérivée est $\dfrac{2}{\sqrt{4x+5}}$ et le carré $4x+5$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{4x+5}}\right)' = -\frac{\frac{2}{\sqrt{4x+5}}}{4x+5} = -\frac{2}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}$$

$$f''(x) = 2 \times \left(-\frac{2}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}\right) = \boxed{-\frac{4}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}}$$

Ce nombre est strictement négatif sur $[0\,;+\infty[$, donc $\boxed{f \text{ est concave sur } [0\,;+\infty[.}$

Partie B : étude d'une suite

6. $u_0 = 0$, puis :

$$u_1 = \sqrt{4 \times 0 + 5} = \sqrt{5} \approx \boxed{2{,}236}$$

$$u_2 = \sqrt{4u_1 + 5} \approx \sqrt{13{,}944} \approx \boxed{3{,}734} \qquad u_3 = \sqrt{4u_2 + 5} \approx \sqrt{19{,}937} \approx \boxed{4{,}465}$$

Conjecture : la suite (u_n) semble croissante, majorée par 5, et converger vers 5.

7. Considérons la propriété, définie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5 \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{5} \approx 2{,}236$. On vérifie bien

$$0 \leqslant 0 \leqslant 2{,}236 \leqslant 5$$

donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons P_k vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$.
La fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ (question 1.), donc elle conserve l'ordre :

$$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(5)$$

c'est-à-dire, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(5) = 5$ (question 2.) :

$$\sqrt{5} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 5$$

Or $\sqrt{5} \geqslant 0$, donc a fortiori $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 5$: la propriété P_{k+1} est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5}$$

Remarque : on pouvait aussi obtenir $u_n \leqslant u_{n+1}$ directement par la question 4. : puisque $u_n \in [0\,;5]$, on a $f(u_n) \geqslant u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_n$.

8. D'après ce qui précède, la suite (u_n) est **croissante** (car $u_n \leqslant u_{n+1}$) et **majorée par** 5. D'après le théorème de la limite monotone (chapitre 1) :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

9. Notons ℓ sa limite. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout n, on a par passage à la limite $\ell \in [0\,;5]$.
D'une part, la suite (u_{n+1}) est extraite de (u_n) et converge donc aussi vers ℓ. D'autre part, f est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc en particulier en ℓ : la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Par unicité de la limite :

$$\ell = f(\ell)$$

D'après la question 2., la seule solution de cette équation sur $[0\,;+\infty[$ est 5, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 5}$$

C'est ici que la continuité est indispensable : sans elle, rien ne permettrait de faire « passer la limite à l'intérieur » de f.

10. On boucle tant que le seuil n'est pas dépassé :

```
from math import sqrt

def seuil(s):
    u = 0
    n = 0
    while u <= s:
        u = sqrt(4*u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

11. En poursuivant les calculs, on trouve $u_9 \approx 4{,}99773$ et $u_{10} \approx 4{,}99909$. Le seuil 4,999 est donc franchi au rang 10 :

$$\boxed{\texttt{seuil(4.999)} \text{ renvoie } 10}$$

En revanche, $\boxed{\texttt{seuil(5)} \text{ provoquerait une boucle infinie}}$: la suite est strictement croissante et majorée par 5, donc $u_n < 5$ pour tout n — la condition `u <= s` ne deviendrait jamais fausse. La limite est atteinte « à l'infini », jamais à un rang fini.

Nuance d'informatique : en pratique, les arrondis de la machine finissent par renvoyer exactement 5,0 et la boucle s'arrête tout de même. Mathématiquement, c'est bien d'une boucle infinie qu'il s'agit.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. **Réponse A.** On factorise par x^2 : $\dfrac{3x^2-x+2}{1-2x^2} = \dfrac{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-2} \longrightarrow \dfrac{3}{-2} = \boxed{-\dfrac{3}{2}}$

2. **Réponse B.** Le numérateur tend vers $3>0$ et, pour $x<2$, on a $x-2<0$ donc $x-2\to 0^-$. Le quotient tend donc vers $\boxed{-\infty}$.

3. **Réponse B.** Avec $u(x)=x^2+1$ et $u'(x)=2x$: $(u^3)' = 3u'u^2 = \boxed{6x(x^2+1)^2}$. La réponse A est le résultat que l'on obtient en oubliant u'.

4. **Réponse A.** Avec $u(x)=-3x+1$ et $u'(x)=-3$: $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u = \boxed{-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}}$.

5. **Réponse B.** $f''(x)=6x-12$ s'annule en $x=2$ *en changeant de signe* (négative avant, positive après) : il y a bien un point d'inflexion d'abscisse $\boxed{2}$.

6. **Réponse A.** Si $f(x)=x^4$, alors $f''(x)=12x^2\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$. *Attention :* $f''(0)=0$ n'entraîne pas un changement de convexité, comme vu à l'exercice 18.

7. **Réponse A.** Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'**existence** : il affirme qu'il existe *au moins* une solution. L'unicité relève du corollaire, qui exige en plus la stricte monotonie.

8. **Réponse A.** f est continue sur $[0\,;1]$ et $f(0)=-1<0<3=f(1)$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule **au moins** une fois. Rien ne permet d'affirmer qu'elle ne s'annule qu'une fois, faute de connaître ses variations.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Soit $x > 0$. On reconnaît le produit de deux expressions conjuguées :

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2 = (x+1) - x = 1$$

Comme $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0$, on peut diviser par cette quantité :

$$\boxed{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}$$

2. Pour $x > 0$, on a $\sqrt{x+1} > 0$, donc $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > \sqrt{x} > 0$. En passant aux inverses, ce qui renverse l'ordre :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

c'est-à-dire, d'après la question 1. :

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (limite de référence) et la fonction nulle tend également vers 0. D'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 0}$$

3. (a) Même technique :

$$\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1$$

et $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ pour $x > 0$, donc

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}}$$

(b) Pour $x > 0$: $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $\sqrt{x^2+1} + x > x > 0$, et en passant aux inverses :

$$0 < \varphi(x) < \frac{1}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes donne :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0}$$

(c) L'écart vertical entre la courbe de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et la droite d'équation $y = x$ vaut exactement $\varphi(x)$, qui tend vers 0. Autrement dit,

$$\boxed{\text{la courbe se rapproche indéfiniment de la droite } y = x \text{ quand } x \to +\infty.}$$

De plus $\varphi(x) > 0$: la courbe reste toujours strictement *au-dessus* de cette droite, sans jamais la toucher.

Remarque de cours (hors programme du chapitre) : on dit que la droite $y = x$ est **asymptote oblique** à la courbe. Le chapitre ne définit que les asymptotes horizontales et verticales, mais le principe est le même : c'est une droite dont la courbe se rapproche indéfiniment.

4. (a) $\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right) = (x^2+x)-x^2 = x$, donc

$$\boxed{\psi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}}$$

(b) Pour $x > 0$, on peut factoriser sous la racine :

$$\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

en utilisant $\sqrt{x^2} = |x| = x$ car $x > 0$. *C'est ici le piège de l'exercice :* pour $x < 0$ on aurait $\sqrt{x^2} = -x$, et tout le calcul changerait de signe.
On factorise alors le dénominateur par x :

$$\psi(x) = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}}$$

(c) Par hypothèse, $\sqrt{1+\frac{1}{x}} \to 1$, donc le dénominateur tend vers $1+1=2$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\psi(x) = \frac{1}{2}}$$

(d) Les deux situations se ressemblent beaucoup, et pourtant :

$$\sqrt{x^2+1}-x \longrightarrow 0 \qquad \text{tandis que} \qquad \sqrt{x^2+x}-x \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Commentaire. Sous la racine, le terme $+1$ est *négligeable* devant x^2 : la racine se comporte exactement comme x, et l'écart s'évanouit. Le terme $+x$, lui, grandit avec x : même s'il reste négligeable devant x^2 (les deux fonctions ont bien la même « allure »), il laisse subsister un écart constant. La morale est qu'une forme indéterminée $\infty-\infty$ ne peut jamais se deviner : elle exige un calcul.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

1. Avec $u(x) = 1+x$, donc $u'(x) = 1$, et $u(x) > 0$ pour $x > -1$:

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}$$

On dérive à nouveau, en écrivant $g'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et en appliquant $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = \sqrt{1+x}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2} = -\frac{1}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$$

$$g''(x) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2(1+x)\sqrt{1+x}}\right) = \boxed{-\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}}$$

2. Pour $x \geqslant 0$, on a $1+x > 0$ et $\sqrt{1+x} > 0$, donc le dénominateur est strictement positif et $g''(x) < 0$. D'après le théorème de caractérisation de la convexité :

$$\boxed{g \text{ est concave sur } [0\,;+\infty[.}$$

3. $g(0) = \sqrt{1} = 1$ et $g'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$, donc :

$$y = \frac{1}{2}(x-0) + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T : y = \frac{x}{2} + 1}$$

4. Une fonction concave a sa courbe située *en dessous* de chacune de ses tangentes. En appliquant cela à la tangente T :

$$\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0, \quad \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}}$$

5. Posons $h(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \sqrt{1+x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Alors

$$h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}$$

Pour $x \geqslant 0$, on a $1 + x \geqslant 1$ donc $\sqrt{1+x} \geqslant 1$, et le numérateur est positif. Ainsi $h'(x) \geqslant 0$: la fonction h est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme

$$h(0) = 1 + 0 - \sqrt{1} = 0$$

on en déduit que $h(x) \geqslant h(0) = 0$ pour tout $x \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \geqslant 0 \qquad \text{soit} \qquad \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$$

On retrouve bien l'inégalité, cette fois par une étude de fonction.

6. En prenant $x = 0{,}02$:

$$\sqrt{1{,}02} \leqslant 1 + \frac{0{,}02}{2} = \boxed{1{,}01}$$

La calculatrice donne $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}00995$, donc l'erreur commise vaut

$$1{,}01 - 1{,}00995 \approx \boxed{5 \times 10^{-5}}$$

On remarque que l'approximation est excellente : la tangente épouse d'autant mieux la courbe que l'on reste proche du point de contact.

7. **Oui, l'inégalité reste valable.** Le calcul de g'' est en effet valable pour tout $x > -1$, et non seulement pour $x \geqslant 0$: la fonction g est donc concave sur $]-1\,;+\infty[$ tout entier, et sa courbe y reste sous la tangente T.

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1\,;+\infty[, \quad \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}}$$

Le cas $x = -1$ se vérifie directement : $\sqrt{0} = 0$ et $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, et l'on a bien $0 \leqslant \frac{1}{2}$. L'inégalité vaut donc sur $[-1\,;+\infty[$.

Remarque : en $x = -1$, la fonction g n'est pas dérivable (tangente verticale), ce qui explique que l'on doive traiter ce point à part.

Pour aller plus loin

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Traduction de l'hypothèse. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)\,x + f(0)$, et celle de g a pour équation $y = g'(0)\,x + g(0)$. Deux droites non verticales sont confondues si et seulement si elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine. Notons donc :

$$c = f(0) = g(0) \qquad \text{et} \qquad m = f'(0) = g'(0)$$

La troisième fonction. Posons $h = \dfrac{fg}{2}$. La formule de dérivation d'un produit, établie en un point exactement comme sur un intervalle, donne :

$$h(0) = \frac{f(0)g(0)}{2} = \frac{c^2}{2} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = \frac{f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{2} = \frac{mc + cm}{2} = mc$$

La tangente à la courbe de h en 0 doit être la même droite, d'où deux conditions :

$$\frac{c^2}{2} = c \qquad \text{et} \qquad mc = m$$

La première s'écrit $c(c-2) = 0$, soit $c = 0$ ou $c = 2$. La seconde s'écrit $m(c-1) = 0$; comme c ne vaut pas 1, elle impose $m = 0$.

Réciproque. Les deux cas se produisent : avec $f = g$ constantes égales à 0, les trois courbes ont pour tangente commune la droite $y = 0$; avec $f = g$ constantes égales à 2, la fonction h vaut aussi 2, et la tangente commune est $y = 2$.

$$\boxed{\text{La tangente commune a pour équation } y = 0 \text{ ou } y = 2.}$$

Remarque : le résultat surprend, puisque l'hypothèse ne dit rien de la pente. C'est la formule du produit qui la contraint : elle impose $h'(0) = mc$, et comme l'ordonnée c ne peut valoir que 0 ou 2, jamais 1, l'égalité $mc = m$ n'est possible que pour une pente nulle.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

On raisonne par récurrence sur n, avec la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout réel x ».

Initialisation : $f^{(0)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = 1 \times \mathrm{e}^{-x^2}$, donc $P_0 = 1$ convient.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n. La fonction $x \mapsto P_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit d'un polynôme et de e^u avec $u(x) = -x^2$. D'après la dérivée d'un produit, et puisque $\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)' = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$:

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} + P_n(x) \times \left(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \left(P_n'(x) - 2x\,P_n(x)\right)\mathrm{e}^{-x^2}$$

La fonction $P_{n+1} = P_n' - 2xP_n$ est un polynôme, car la dérivée d'un polynôme et le produit de deux polynômes en sont encore : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, et ces polynômes vérifient la relation de récurrence :

$$\boxed{P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2x\,P_n(x)}$$

On en déduit successivement $P_1(x) = 0 - 2x \times 1$, puis $P_2(x) = -2 - 2x \times (-2x)$:

$$\boxed{P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = -2x \qquad P_2(x) = 4x^2 - 2}$$

Remarque : on retrouve l'exercice 19. Comme $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, le signe de f'' est celui de $P_2(x) = 4x^2 - 2$, qui s'annule en $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en changeant de signe : ce sont les abscisses des deux points d'inflexion. La même récurrence montre que P_n est de degré n, de coefficient dominant $(-2)^n$; par exemple $P_3(x) = -8x^3 + 12x$.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

La fonction f est dérivable. L'énoncé ne le suppose pas : il faut le démontrer. Fixons un réel x. Pour tout réel $h \neq 0$, l'hypothèse appliquée à x et $y = x + h$ donne $|f(x+h) - f(x)| \leqslant h^2$, puis, en divisant par $|h| > 0$:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant |h| \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad -|h| \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant |h|$$

Les deux fonctions encadrantes tendent vers 0 lorsque h tend vers 0. D'après le théorème des gendarmes, énoncé dans le cours en $+\infty$ mais qui vaut de la même façon en un point, le taux d'accroissement tend vers 0 :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en tout réel } x, \text{ et } f'(x) = 0.}$$

Conclusion. Comme $f' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est croissante ; comme $f' \leqslant 0$, elle est aussi décroissante. Pour $x < y$, on a donc à la fois $f(x) \leqslant f(y)$ et $f(x) \geqslant f(y)$, soit $f(x) = f(y)$.

$$\boxed{f \text{ est constante.}}$$

Piège : c'est l'exposant 2 qui fait tout. L'hypothèse $|f(y) - f(x)| \leqslant |y - x|$ serait insuffisante : la fonction $x \mapsto x$ la vérifie sans être constante. Le carré rend le taux d'accroissement aussi petit que l'on veut.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

La fonction f est un polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 3x^2 + p$. En factorisant par x^3, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. **Si** $p > 0$, alors $f'(x) \geqslant p > 0$ pour tout x : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **Si** $p = 0$, alors $f(x) = x^3 + q$ est strictement croissante, comme $x \mapsto x^3$. Dans les deux cas :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

   La fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et 0 est compris entre ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{\text{si } p \geqslant 0, \text{ l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique racine réelle.}}$$

2. **Si** $p < 0$, posons $s = \sqrt{-\dfrac{p}{3}} > 0$. Alors $f'(x) = 3\left(x^2 - s^2\right) = 3(x-s)(x+s)$ s'annule en $x_1 = -s$ et $x_2 = s$; elle est strictement positive à l'extérieur de $[x_1\,;x_2]$ et strictement négative à l'intérieur :

x	$-\infty$	$x_1 = -s$	$x_2 = s$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(x_1)$	↘ $f(x_2)$ ↗	$+\infty$

La fonction f admet un maximum local $f(x_1)$ et un minimum local $f(x_2)$, avec $f(x_1) > f(x_2)$ puisque f est strictement décroissante sur $[x_1\,;x_2]$.

3. On utilise $s^2 = -\dfrac{p}{3}$ pour simplifier :

$$f(\pm s) = \pm s^3 \pm ps + q = \pm s\left(s^2 + p\right) + q = \pm s \times \frac{2p}{3} + q$$

Le produit est donc de la forme $(q+A)(q-A) = q^2 - A^2$, avec $A = \dfrac{2p}{3}s$:

$$f(x_1)\,f(x_2) = q^2 - \frac{4p^2}{9}\,s^2 = q^2 - \frac{4p^2}{9} \times \left(-\frac{p}{3}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f(x_1)\,f(x_2) = \frac{4p^3 + 27q^2}{27} = -\frac{\Delta}{27}}$$

4. **Cas $p \geqslant 0$.** Alors $\Delta = -4p^3 - 27q^2 \leqslant 0$, avec égalité seulement si $p = q = 0$. La question 1 a montré qu'il y a toujours une unique racine.

Cas $p < 0$. On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des trois intervalles de stricte monotonie, en lisant le tableau.

- Si $\Delta > 0$, alors $f(x_1)f(x_2) < 0$, donc $f(x_1) > 0 > f(x_2)$: il y a une racine dans chacun des intervalles $]-\infty\,;x_1[$, $]x_1\,;x_2[$ et $]x_2\,;+\infty[$, soit trois racines.
- Si $\Delta < 0$, les deux extremums sont non nuls et de même signe. S'ils sont tous deux positifs, f ne s'annule que sur $]-\infty\,;x_1[$; s'ils sont tous deux négatifs, seulement sur $]x_2\,;+\infty[$. Dans les deux cas, il y a une seule racine.
- Si $\Delta = 0$, l'un des extremums est nul, mais pas les deux puisque $f(x_1) > f(x_2)$. Si par exemple $f(x_1) = 0$, alors x_1 est racine, f ne s'annule pas ailleurs sur $]-\infty\,;x_2]$, et une seconde racine se trouve dans $]x_2\,;+\infty[$. Il y a deux racines distinctes.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
nombre de racines réelles	1	2 (ou 1 si $p = q = 0$)	3

si $\Delta < 0$, l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet une unique racine réelle.

Vérification : pour x^3-3x+1, étudié à l'exercice 23, on a $p = -3$, $q = 1$ et $\Delta = -(-108+27) = 81 > 0$: on retrouve bien trois racines. Pour $x^3 + 3x - 5$, étudié à l'exercice 24, on a $p = 3 > 0$: une seule racine, ce qu'on avait établi. ✓

Remarque : le signe moins dans la définition de Δ est choisi pour que, comme pour le trinôme du second degré, un discriminant strictement positif corresponde au nombre maximal de racines réelles.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Posons $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [a\,;b]$. La fonction g est continue sur $[a\,;b]$, comme différence de deux fonctions continues, et les points fixes de f sont exactement les solutions de $g(x) = 0$.

Comme f est à valeurs dans $[a\,;b]$, on a $a \leqslant f(a)$ et $f(b) \leqslant b$, c'est-à-dire :

$$g(a) = f(a) - a \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad g(b) = f(b) - b \leqslant 0$$

Le réel 0 est donc compris entre $g(b)$ et $g(a)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$.

f admet au moins un point fixe dans $[a\,;b]$.

Interprétation graphique : la courbe de f relie un point du bord gauche du carré $[a\,;b] \times [a\,;b]$ à un point de son bord droit sans en sortir ; elle coupe donc nécessairement la diagonale d'équation $y = x$.

Piège : les deux hypothèses sont indispensables. Sans la continuité, la fonction qui vaut 1 sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et 0 sur $\left]\frac{1}{2}\,;1\right]$ envoie $[0\,;1]$ dans lui-même sans point fixe. Sans l'hypothèse sur les valeurs, la fonction $x \mapsto x+1$ est continue sur $[0\,;1]$ et n'a aucun point fixe. Enfin, le point fixe n'est pas forcément unique : pour l'identité, tous les points le sont. L'exercice 44 donne une condition qui assure l'unicité.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆⋆

1. Le produit uv ne s'annule pas sur I, et :

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v+uv'}{uv} = \boxed{\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}}$$

La dérivée logarithmique transforme un produit en somme.

2. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que, si $u_1, \dots, u_n$ sont dérivables et ne s'annulent pas sur I, alors :

$$\frac{(u_1u_2\cdots u_n)'}{u_1u_2\cdots u_n} = \frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\cdots+\frac{u_n'}{u_n}$$

Pour $n=1$, il n'y a rien à démontrer. Si la formule vaut pour n facteurs, on applique la question 1 à $u = u_1\cdots u_n$, qui ne s'annule pas, et à $v = u_{n+1}$: la dérivée logarithmique de $u_1\cdots u_{n+1}$ vaut celle de u, donnée par l'hypothèse de récurrence, augmentée de $\dfrac{u_{n+1}'}{u_{n+1}}$.

3. Le polynôme P s'annule exactement en $a_1, \dots, a_n$. Sa dérivée logarithmique est donc définie sur chacun des $n+1$ intervalles

$$]-\infty\,;a_1[\,,\quad]a_1\,;a_2[\,,\quad \dots,\quad]a_{n-1}\,;a_n[\,,\quad]a_n\,;+\infty[$$

On y applique la question 2 avec $u_k(x) = x-a_k$, qui vérifie $u_k'(x)=1$:

$$\boxed{\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n}}$$

4. **Sens de variation.** Chaque terme $x \mapsto \dfrac{1}{x-a_k}$ a pour dérivée $-\dfrac{1}{(x-a_k)^2}$, donc :

$$\left(\frac{P'}{P}\right)'(x) = -\frac{1}{(x-a_1)^2}-\cdots-\frac{1}{(x-a_n)^2} < 0$$

La fonction $\dfrac{P'}{P}$ est strictement décroissante sur chacun des $n+1$ intervalles.

Limites. En $\pm\infty$, chacun des n termes tend vers 0, donc la somme aussi. Au voisinage de a_k, le terme $\dfrac{1}{x-a_k}$ tend vers $+\infty$ à droite et vers $-\infty$ à gauche, tandis que les autres termes ont une limite finie. Ainsi :

x	$-\infty$		a_1		a_2	$\cdots$	a_n		$+\infty$
$\dfrac{P'(x)}{P(x)}$	0	$\searrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ / 0

Sur $]-\infty\,;a_1[$, la fonction décroît de la limite 0 vers $-\infty$: elle prend toutes les valeurs de $]-\infty\,;0[$. Sur chaque intervalle $]a_k\,;a_{k+1}[$, elle décroît de $+\infty$ à $-\infty$. Sur $]a_n\,;+\infty[$, elle décroît de $+\infty$ vers 0 : elle prend toutes les valeurs de $]0\,;+\infty[$.

5. **Les a_k ne sont pas solutions.** On a $P(a_k) = 0$. Écrivons $P(x) = (x - a_k)\,Q_k(x)$, où Q_k est le produit des autres facteurs ; alors $P'(x) = Q_k(x) + (x - a_k)\,Q_k'(x)$, donc $P'(a_k) = Q_k(a_k)$, produit des $a_k - a_j$ pour $j \neq k$, qui est non nul. Ainsi $P'(a_k) - \alpha P(a_k) = P'(a_k) \neq 0$.

   Réduction. Les solutions de $P'(x) - \alpha P(x) = 0$ sont donc les réels x distincts des a_k tels que $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \alpha$. Sur chaque intervalle, la fonction $\dfrac{P'}{P}$ est continue et strictement décroissante : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, étendu aux intervalles ouverts, la valeur α y est atteinte une fois si elle appartient à l'intervalle image, et jamais sinon.

   Décompte. Chacun des $n - 1$ intervalles $]a_k\,;a_{k+1}[$ fournit exactement une solution, quel que soit α. L'intervalle $]-\infty\,;a_1[$ en fournit une si $\alpha < 0$, l'intervalle $]a_n\,;+\infty[$ en fournit une si $\alpha > 0$.

$$\boxed{\text{L'équation } P'(x) - \alpha P(x) = 0 \text{ admet } n \text{ racines réelles si } \alpha \neq 0, \text{ et } n-1 \text{ si } \alpha = 0.}$$

Vérification : pour $P(x) = x(x-1)(x-3)$, on trouve à la calculatrice trois racines réelles pour $\alpha = -2$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$, et deux pour $\alpha = 0$. ✓
Remarque : le cas $\alpha = 0$ dit que P' s'annule exactement une fois entre deux racines consécutives de P. C'est un cas particulier du théorème de Rolle, qui sera démontré en première année d'études supérieures : entre deux points où une fonction dérivable prend la même valeur, sa dérivée s'annule.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

1. La fonction $g : x \mapsto f(x) - Mx$ est dérivable sur $[a\,;b]$, de dérivée $g'(x) = f'(x) - M \leqslant 0$. Elle est donc décroissante, et $g(b) \leqslant g(a)$:

$$f(b) - Mb \leqslant f(a) - Ma \qquad \text{soit} \qquad f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

   De même, $h : x \mapsto f(x) - mx$ a pour dérivée $h'(x) = f'(x) - m \geqslant 0$. Elle est croissante, donc $h(b) \geqslant h(a)$, c'est-à-dire $f(b) - f(a) \geqslant m(b-a)$.

$$\boxed{m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)}$$

2. L'hypothèse $|f'(x)| \leqslant K$ s'écrit $-K \leqslant f'(x) \leqslant K$. La question 1, avec $m = -K$ et $M = K$, donne $-K(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant K(b-a)$. Comme $b - a = |b - a|$:

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b-a|}$$

   Soient maintenant x et y dans $[a\,;b]$. Si $x = y$, l'inégalité est évidente. Si $x < y$, l'hypothèse sur f' vaut en particulier sur $[x\,;y]$, et ce qui précède, appliqué à cet intervalle, donne $|f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y - x|$. Si $x > y$, on échange les rôles de x et y, les deux membres étant symétriques.

$$\boxed{\text{pour tous } x, y \in [a\,;b], \quad |f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y-x|}$$

Interprétation : si $f(t)$ désigne la position d'un mobile à l'instant t, la dérivée est sa vitesse. L'inégalité dit qu'un mobile dont la vitesse ne dépasse jamais K ne peut parcourir, entre les instants a et b, une distance supérieure à $K(b-a)$.
Remarque : le nom vient du *théorème des accroissements finis*, étudié après le baccalauréat, qui affirme plus précisément l'existence d'un réel $c \in]a\,;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆⋆

Préliminaires. La fonction f est dérivable, donc continue, sur $[a\,;b]$; elle est à valeurs dans $[a\,;b]$, et l'exercice 41 fournit un point fixe c. Une récurrence immédiate montre que tous les termes u_n appartiennent à $[a\,;b]$: c'est vrai pour u_0, et si $u_n \in [a\,;b]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [a\,;b]$. Enfin, l'exercice 43 s'applique avec la constante K : pour tous x et y de $[a\,;b]$, on a $|f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y-x|$.

Récurrence. Pour $n = 0$, l'inégalité $|u_0 - c| \leqslant K^0 |u_0 - c|$ est une égalité. Supposons $|u_n - c| \leqslant K^n |u_0 - c|$ pour un entier n. Comme u_n et c sont dans $[a\,;b]$ et que $c = f(c)$:

$$|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| \leqslant K\,|u_n - c| \leqslant K \times K^n |u_0 - c| = K^{n+1} |u_0 - c|$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \quad |u_n - c| \leqslant K^n |u_0 - c|}$$

Conclusion. Comme $0 \leqslant K < 1$, la suite géométrique (K^n) tend vers 0. On a $0 \leqslant |u_n - c| \leqslant K^n |u_0 - c|$, et le théorème des gendarmes donne $|u_n - c| \to 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } c, \text{ et l'écart est divisé au moins par } \frac{1}{K} \text{ à chaque étape.}}$$

Remarque : le point fixe est ici *unique*. Si c' en était un autre, on aurait $|c - c'| = |f(c) - f(c')| \leqslant K|c - c'|$, soit $(1 - K)|c - c'| \leqslant 0$, donc $c = c'$.
Application à l'exercice 33 : la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4x + 5}$ est croissante et envoie $[0\,;5]$ dans $\left[\sqrt{5}\,;5\right] \subset [0\,;5]$, avec $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{5}} = K \approx 0{,}894$. Son point fixe est $c = 5$, et l'on obtient, pour $u_0 = 0$:

$$|u_n - 5| \leqslant 5 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$$

Cette majoration garantit une précision de 10^{-3} dès $n = 77$, alors que l'exercice 33 a constaté qu'elle est atteinte dès $n = 10$. La majoration est pessimiste, car elle utilise la pente maximale $\frac{2}{\sqrt{5}}$ atteinte en 0, alors qu'au voisinage de la limite la pente ne vaut plus que $f'(5) = \frac{2}{5}$. Elle a cependant un mérite que l'exercice 33 n'avait pas : elle donne une vitesse de convergence garantie, et non une simple convergence.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Partie A

1. La tangente au point d'abscisse x_0 a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Elle coupe l'axe des abscisses au point où $y = 0$, ce qui donne, puisque $f'(x_0) \neq 0$:

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

2. Ici $f'(x) = 2x$, et l'hypothèse $f'(x_0) \neq 0$ signifie $x_0 \neq 0$. Alors :

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - a}{2x_0} = \frac{2x_0^2 - x_0^2 + a}{2x_0} = \frac{x_0^2 + a}{2x_0} = \boxed{\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)}$$

Ainsi, la suite de la partie B consiste à remplacer chaque terme par l'abscisse où la tangente à la parabole $y = x^2 - a$ coupe l'axe des abscisses, c'est-à-dire là où elle s'annule « si elle était droite ».

Partie B

3. La fonction f_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et :

$$f_a'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{x^2 - a}{2x^2} = \frac{(x - \sqrt{a})\,(x + \sqrt{a})}{2x^2}$$

dont le signe est celui de $x - \sqrt{a}$. Par ailleurs $\dfrac{a}{x} \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$, et $x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$; enfin $f_a\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \sqrt{a}\right) = \sqrt{a}$.

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f_a'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow$ $\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale. De plus, $f_a(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{2x}$ tend vers 0 en $+\infty$: comme à l'exercice 35, la courbe se rapproche indéfiniment de la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$, en restant au-dessus.

4. Par récurrence : $u_0 > 0$, et si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ est bien défini, et strictement positif comme demi-somme de deux réels strictement positifs.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bien définie et à valeurs dans }]0\,;+\infty[.}$$

5. La question 3 montre que $\sqrt{a}$ est le minimum de f_a, d'où la première inégalité. On peut aussi la retrouver par le calcul :

$$f_a(x) - \sqrt{a} = \frac{x^2 - 2\sqrt{a}\,x + a}{2x} = \frac{\left(x - \sqrt{a}\right)^2}{2x} \geqslant 0$$

Pour la seconde, si $x \geqslant \sqrt{a}$, alors $x^2 \geqslant a$, et :

$$f_a(x) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - x\right) = \frac{a - x^2}{2x} \leqslant 0$$

$$\boxed{f_a(x) \geqslant \sqrt{a} \text{ pour } x > 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(x) \leqslant x \text{ pour } x \geqslant \sqrt{a}}$$

6. Pour $n \geqslant 1$, on a $u_n = f_a(u_{n-1}) \geqslant \sqrt{a}$ par la première inégalité, puis $u_{n+1} = f_a(u_n) \leqslant u_n$ par la seconde. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante et minorée par $\sqrt{a}$: elle converge vers une limite $\ell \geqslant \sqrt{a} > 0$. La fonction f_a étant continue en ℓ, le passage à la limite dans $u_{n+1} = f_a(u_n)$ donne, comme à l'exercice 33 :

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) \iff 2\ell^2 = \ell^2 + a \iff \ell^2 = a$$

Comme $\ell > 0$:

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \sqrt{a}.}$$

Remarque : le premier terme u_0 peut être inférieur à $\sqrt{a}$; c'est pourquoi la décroissance n'est établie qu'à partir du rang 1.

7. On a obtenu à la question 5 l'égalité $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2u_n}$. De même, $u_{n+1} + \sqrt{a} = \dfrac{u_n^2 + 2\sqrt{a}\,u_n + a}{2u_n} = \dfrac{\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2}{2u_n}$. En faisant le quotient, les $2u_n$ se simplifient :

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2} = v_n^2}$$

8. Par récurrence, $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_0^4$, $v_3 = v_0^8$ et, si $v_n = v_0^{2^n}$, alors $v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}$:

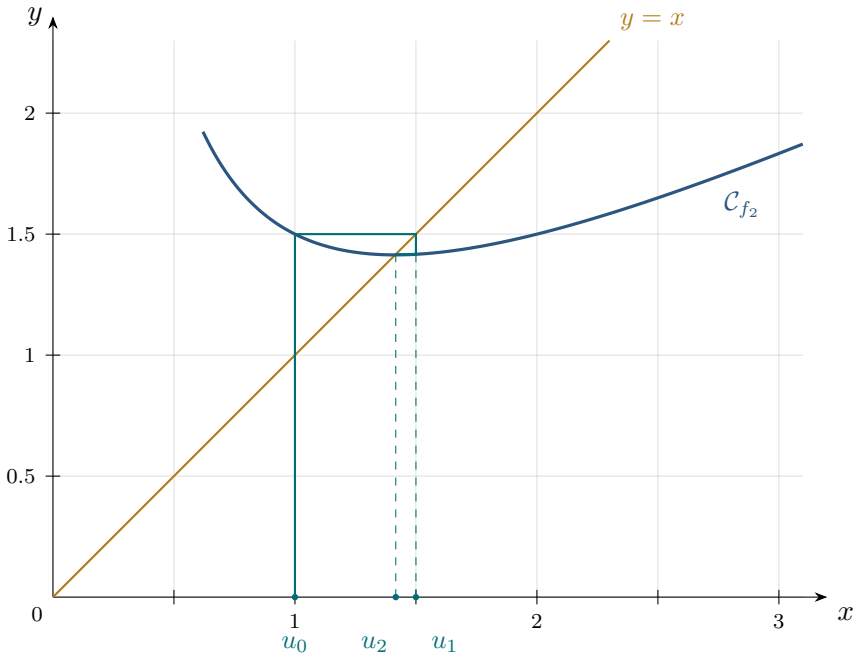
$$\boxed{v_n = {v_0}^{2^n} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}}$$

9. Soit $n \geqslant 1$. De la définition de v_n, on tire $u_n - \sqrt{a} = v_n\,(u_n + \sqrt{a})$. D'après la question 6, $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et $u_n \leqslant u_1$, la suite étant décroissante à partir du rang 1. Comme de plus $v_n = v_0^{2^n} \geqslant 0$, l'exposant 2^n étant pair :

$$\boxed{0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant (u_1 + \sqrt{a}) \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}}$$

Puisque $u_0 > 0$, on a $|u_0 - \sqrt{a}| < u_0 + \sqrt{a}$, donc $q = |v_0| < 1$. Or $2^n \geqslant n$, donc $0 \leqslant q^{2^n} \leqslant q^n$, et q^n tend vers 0. Le théorème des gendarmes montre à nouveau que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$, mais il fournit en plus une estimation de l'écart.

10. Avec $a = 2$ et $u_0 = 1$, on calcule $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{17}{12}$ et $u_3 = \frac{577}{408}$. Le graphique ci-dessous représente la fonction f_2, la droite d'équation $y = x$, et la construction des premiers termes.



On part de u_0 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe pour lire $u_1 = f_2(u_0)$, puis on revient à la droite $y = x$ pour reporter u_1 en abscisse, et ainsi de suite. Dès le deuxième terme, la construction est indiscernable du point d'intersection de la courbe et de la droite, d'abscisse $\sqrt{2}$.

Ici $v_0 = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = -\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$, et l'inégalité de la question 9 devient :

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{2^n}$$

avec $3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}172$. Le majorant vaut environ $8{,}6 \times 10^{-2}$ pour $n = 1$, $2{,}5 \times 10^{-3}$ pour $n = 2$ et $2{,}2 \times 10^{-6}$ pour $n = 3$. Il suffit donc de prendre $n = 3$:

$$\boxed{u_3 = \frac{577}{408} \approx 1{,}414\,216 \quad \text{approche } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}$$

En effet, $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,214$, et l'écart réel vaut environ $2{,}1 \times 10^{-6}$.

Remarque : les écarts successifs $u_n - \sqrt{2}$ valent environ $8{,}6 \times 10^{-2}$, $2{,}5 \times 10^{-3}$, $2{,}1 \times 10^{-6}$ puis $1{,}6 \times 10^{-12}$: le nombre de décimales exactes double à chaque étape. La dichotomie de l'exercice 27 n'en gagne qu'une toutes les trois ou quatre étapes. Cet algorithme, déjà connu de Héron d'Alexandrie, a été généralisé au XVII$^{\text{e}}$ siècle par Newton et Raphson à des équations quelconques, grâce à la construction de la partie A.