EXERCICES – CHAPITRE 3

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Limites d'une fonction

EXERCICE 1 ⋆

Déterminer les limites suivantes, en citant à chaque fois la limite de référence utilisée.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^5}$

EXERCICE 2 ⋆

Soient f et g deux fonctions admettant les limites indiquées en α, où α désigne $-\infty$, un réel a ou $+\infty$. Recopier et compléter le tableau suivant : on écrira la limite de $f+g$, de fg et de $\dfrac{f}{g}$, ou bien « F.I. » s'il s'agit d'une forme indéterminée.

	$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$	$\lim(fg)$	$\lim \dfrac{f}{g}$
1.	5	$+\infty$			
2.	$-\infty$	$+\infty$			
3.	0	$+\infty$			
4.	-2	0			
5.	$+\infty$	$+\infty$			
6.	0	0			

Une case n'est pas une forme indéterminée mais demande cependant une information supplémentaire avant de conclure : la repérer et préciser laquelle.

EXERCICE 3 ⋆

Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes en $+\infty$, puis en $-\infty$. On factorisera à chaque fois par le terme de plus haut degré.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$

b) $g(x) = -2x^4 + 7x - 3$

c) $h(x) = -x^5 + x^3 + 100x$

d) $k(x) = 4x^2 - 9x^3$

EXERCICE 4 ⋆

Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes en $+\infty$, puis en $-\infty$.

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x^2-5}$

c) $h(x) = \dfrac{4x-7}{x^2+1}$

d) $k(x) = \dfrac{5x^2-1}{3-x}$

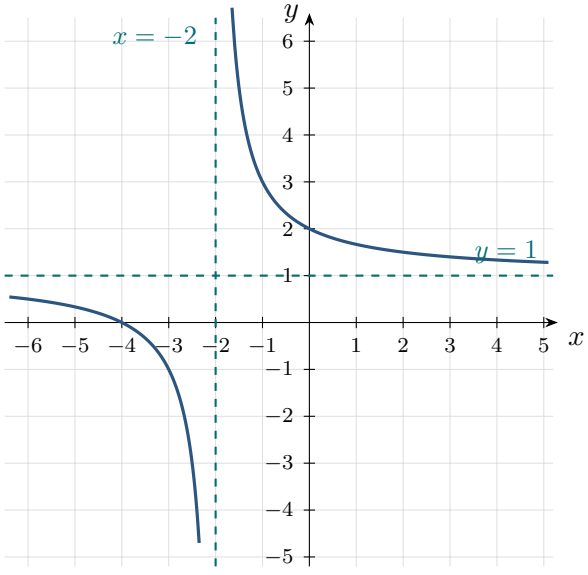
EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en 1 ?
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $g(x) = \dfrac{x-4}{(x+2)^2}$. Déterminer la limite de g en -2. Pourquoi n'est-il pas nécessaire ici de distinguer la limite à droite et la limite à gauche ?
3. Soit h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $h(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$. Vérifier que l'on est en présence d'une forme indéterminée, puis lever cette indétermination.
4. Soit k définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $k(x) = \dfrac{x+5}{3-x}$. Déterminer les limites de k à droite et à gauche en 3.

Comparaison, gendarmes et asymptotes

EXERCICE 6 ⋆⋆

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, ainsi que ses deux asymptotes en pointillés.



1. Déterminer par lecture graphique $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Déterminer de même $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$.
3. Donner les équations des deux asymptotes à $\mathcal{C}_f$, en précisant leur nature.
4. Sur quel intervalle la courbe est-elle située au-dessus de son asymptote horizontale ?

5. On admet que $f(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$. Retrouver par le calcul les quatre limites des questions 1. et 2.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Soit f une fonction telle que $f(x) \geqslant x^2 - 5x$ pour tout $x \geqslant 0$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en justifiant soigneusement.
2. Soit g une fonction telle que $g(x) \leqslant -x^3 + 2$ pour tout $x \geqslant 1$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
3. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x + \cos(x)$.
   (a) Justifier que $h(x) \geqslant x - 1$ pour tout réel x.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
   (c) Déterminer de même $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Dans chaque cas, encadrer la fonction proposée par deux fonctions de même limite, puis conclure à l'aide du théorème des gendarmes.

1. $f(x) = \dfrac{2+\sin(x)}{x}$ en $+\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{3x+\cos(x)}{x}$ en $+\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ en $+\infty$.
4. $k(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, puis les asymptotes horizontales et verticales à sa courbe représentative. On justifiera chaque réponse par un calcul de limite.

1. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$
2. $g(x) = 5 - \dfrac{4}{x-1}$
3. $h(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+3}$ (attention : le piège est volontaire)
4. $k(x) = \dfrac{x+4}{x^2-1}$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-1}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1. Vérifier que, pour tout $x \neq 1$, on a $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x-1}$.
2. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis à droite et à gauche en 1.
3. Donner les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$.
4. Étudier le signe de $f(x) - 2$, et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.

5. La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe-t-elle son asymptote horizontale ?
6. Tracer une courbe représentative possible pour la fonction f.

Dérivation

EXERCICE 11 ⋆

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$

b) $g(x) = (2x-1)(x^2+3)$

c) $h(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

d) $k(x) = 5\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$

e) $m(x) = x^2\mathrm{e}^x$

f) $n(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$

EXERCICE 12 ⋆

Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ et $a = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$

c) $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $a = 0$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = -2$

EXERCICE 13 ⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, identifier la fonction intérieure u, puis calculer la dérivée.

a) $f(x) = (2x-7)^5$

b) $g(x) = (x^2+x+1)^3$

c) $h(x) = \sqrt{3x+4}$

d) $k(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

e) $m(x) = \mathrm{e}^{5x-2}$

f) $n(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

g) $p(x) = \sqrt{x^2+9}$

h) $q(x) = (1-x)^4$

EXERCICE 14 ⋆⋆

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, puis en donner une forme factorisée.

1. $f(x) = x\sqrt{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$
2. $g(x) = (2x+1)^3(x-4)$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$
4. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer les limites de f à droite et à gauche en 1. Qu'en déduit-on pour la courbe de f ?

3. Montrer que, pour tout $x \neq 1$, $\quad f'(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations complet de f.

5. Préciser les valeurs de f aux deux extremums locaux.

EXERCICE 16 ⋆⋆

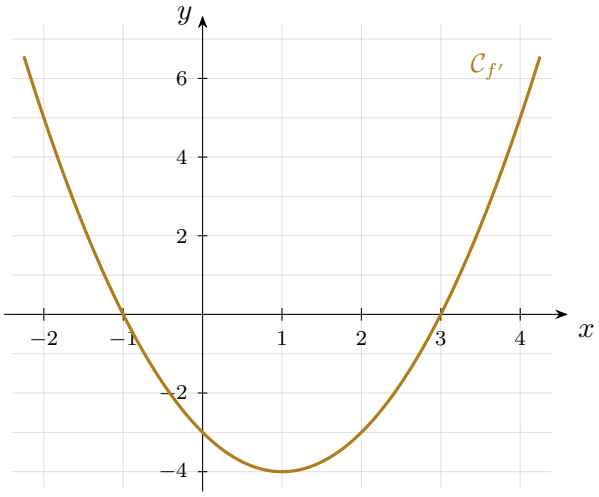
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. La dérivée de $x \mapsto (x^2+1)^5$ est $x \mapsto 5(x^2+1)^4$.
2. La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ est $x \mapsto 3\,\mathrm{e}^{3x}$.
3. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{u'(x)}$.
4. Si u est dérivable et vérifie $u(x) \geqslant 0$ sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I.
5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
6. Pour toutes fonctions f et u dérivables, $(f \circ u)' = f' \circ u'$.

Convexité

EXERCICE 17 ⋆⋆

La courbe ci-dessous est celle de la fonction **dérivée** f' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer par lecture graphique le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
2. Sur quels intervalles la fonction f' est-elle croissante ? décroissante ?
3. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe, puis ceux sur lesquels elle est concave.
4. La courbe de f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, préciser son abscisse.
5. *Attention au piège :* les abscisses des extremums de f et celle du point d'inflexion sont-elles les mêmes ? Expliquer.

EXERCICE 18 ⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}$, calculer f'', étudier son signe, puis préciser les intervalles de convexité et de concavité ainsi que les éventuels points d'inflexion.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 2$

b) $f(x) = x^4 - 2x^3$

c) $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

d) $f(x) = x^4 + 2$

Commenter tout particulièrement le dernier cas.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Étudier la convexité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué, et préciser les points d'inflexion éventuels.

1. $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, puis sur $]-\infty\,;0[$
4. $k(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit f la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

1. Calculer f'' et en déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Que peut-on en déduire, sans aucun calcul supplémentaire, sur la position de la courbe de f par rapport à T ?
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.
5. En déduire un encadrement de $\mathrm{e}^{0,1}$ par un nombre décimal simple, puis comparer à la valeur donnée par la calculatrice.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Une entreprise fabrique x centaines d'objets, avec $0 \leqslant x \leqslant 30$. Le coût total de production, en centaines d'euros, est modélisé par :

$$C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}5x^2 + 20x$$

1. Calculer $C'(x)$, puis montrer que C est croissante sur $[0\,;30]$. Interpréter.
2. Calculer $C''(x)$ et étudier son signe.
3. En déduire les intervalles de convexité et de concavité de C, ainsi que l'abscisse du point d'inflexion.
4. Le coût marginal est modélisé par la fonction C'. Pour quelle production ce coût marginal est-il minimal ? Justifier en utilisant la question 3.
5. Interpréter le point d'inflexion en termes économiques : que se passe-t-il, pour l'entreprise, avant puis après cette valeur ?

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

EXERCICE 22 ⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple ou l'énoncé correct.

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.
2. Toute fonction continue sur un intervalle I est dérivable sur I.
3. La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Une fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
5. Si f est continue sur $[a\,;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.
6. Si f est continue sur $[a\,;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet exactement une solution.

EXERCICE 23 ⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
3. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur des intervalles bien choisis, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins trois solutions distinctes.
4. Le théorème des valeurs intermédiaires permet-il d'affirmer qu'il n'y en a pas davantage ? Quel argument supplémentaire faudrait-il ?

EXERCICE 24 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x-5$.

1. Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, puis étudier ses variations.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. En rédigeant les trois vérifications de la méthode du cours, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\alpha\in\,]1\,;2[$.
5. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 25 ⋆⋆

Soit f une fonction continue et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, en justifiant chaque branche par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Reprendre la question pour $f(x) = 5$, puis pour $f(x) = -3$.
3. Combien l'équation $f(x) = 4$ admet-elle de solutions ? Attention, la réponse n'est pas 1.
4. Combien l'équation $f(x) = -2$ admet-elle de solutions ?
5. Peut-on déterminer, à partir de ce seul tableau, le nombre de points d'inflexion de la courbe de f ? Justifier.

EXERCICE 26 - PYTHON ⋆⋆

On reprend la fonction f de l'exercice 24, définie par $f(x) = x^3+3x-5$, et l'on cherche à approcher sa racine α. On dispose du script suivant :

```
def f(x):
    return x**3 + 3*x - 5

def balayage(a, b, p):
    x = a
    while f(x) < 0:
        x = x + p
    return x - p, x
```

1. Que renvoie l'appel `balayage(1, 2, 0.1)` ? Interpréter le résultat.
2. Pourquoi la boucle `while` s'arrête-t-elle nécessairement ? Quelle propriété de f établie à l'exercice 24 le garantit ?
3. Comment modifier l'appel pour obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} ?
4. Le paramètre `b` n'est jamais utilisé dans la fonction `balayage`. Proposer une modification du script qui l'utilise, de façon à éviter une boucle infinie si la fonction ne s'annulait pas sur $[a\,;b]$.
5. Combien de valeurs de x la fonction `balayage` teste-t-elle, au maximum, pour un pas $p = 10^{-3}$ sur l'intervalle $[1\,;2]$? Et pour $p = 10^{-6}$? Ce procédé vous semble-t-il économe ?

EXERCICE 27 : MÉTHODE DE DICHOTOMIE ⋆⋆

On reprend encore la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 5$, dont on a montré à l'exercice 24 qu'elle s'annule en un unique réel α. Le balayage de l'exercice précédent est simple, mais coûteux. On va lui substituer une méthode bien plus rapide, qui repose sur une idée unique : *couper l'intervalle en deux, et ne conserver que la moitié qui contient* α.

Partie A : le principe, à la main

1. Rappeler pourquoi $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$ permettent d'affirmer que $\alpha \in]1\,;2[$.
2. Calculer $f(1{,}5)$. En comparant son signe à celui de $f(1)$ et de $f(2)$, dire dans laquelle des deux moitiés $]1\,;1{,}5[$ ou $]1{,}5\,;2[$ se trouve α. Quelle est l'amplitude du nouvel encadrement ?
3. Recommencer avec le milieu de l'intervalle obtenu, et ainsi de suite. Recopier et compléter le tableau suivant, où a_n et b_n désignent les bornes de l'encadrement obtenu après n étapes, et m_n le milieu de $[a_n\,;b_n]$:

n	a_n	b_n	m_n	signe de $f(m_n)$	amplitude $b_n - a_n$
0	1	2	1,5		1
1					
2					
3					
4					

4. Donner l'encadrement de α obtenu au bout de 4 étapes, ainsi que son amplitude.

Partie B : pourquoi cela fonctionne, et à quelle vitesse

5. À chaque étape, on remplace $[a_n\,;b_n]$ par l'une de ses deux moitiés. Justifier que :

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$$

6. Expliquer précisément à quel moment on utilise le théorème des valeurs intermédiaires, et à quel moment on utilise la stricte monotonie de f. Que resterait-il de la méthode si f n'était pas continue ?
7. Déterminer le plus petit entier n tel que $b_n - a_n < 10^{-2}$, puis celui tel que $b_n - a_n < 10^{-3}$.
8. Le balayage de pas 10^{-3} de l'exercice 26 demandait jusqu'à 1 000 calculs de f. Combien la dichotomie en demande-t-elle pour la même précision ? Commenter.
9. Que se passerait-il si l'on appliquait la dichotomie à une fonction continue admettant *trois* racines dans $[a\,;b]$, avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$? La méthode échouerait-elle, ou bien fournirait-elle l'une des racines ?

Partie C : mise en œuvre en Python

10. Recopier et compléter le script suivant, qui renvoie un encadrement de α d'amplitude strictement inférieure à `e` :

```
def dichotomie(a, b, e):
    while b - a >= e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) < 0:
            a = ...
```

```
        else:
            b = ...
    return a, b
```

11. Justifier que la condition du `while` finit toujours par devenir fausse.
12. Modifier ce script pour qu'il renvoie également le nombre d'étapes effectuées.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 2 \\ ax - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   (a) Justifier que f est continue sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$, quelle que soit la valeur du réel a.

   (b) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ pour $x \neq 2$ et $g(2) = m$, où m est un réel.

   (a) Simplifier l'écriture de $g(x)$ pour $x \neq 2$.

   (b) Pour quelle valeur de m la fonction g est-elle continue en 2 ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 29 - TYPE BAC ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Partie A : limites et variations

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$, dont on précisera l'équation.
3. Montrer que, pour tout réel x, $\quad f'(x) = \dfrac{4(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, limites comprises.
5. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Partie B : convexité

6. Montrer que, pour tout réel x, $\quad f''(x) = \dfrac{8x\left(x^2-3\right)}{(x^2+1)^3}$.
7. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
8. En déduire les intervalles de convexité et de concavité de f, puis le nombre de points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Partie C : une équation

9. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
10. Résoudre algébriquement cette équation, et vérifier la cohérence avec la question précédente.

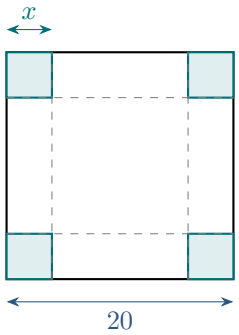
EXERCICE 30 - TYPE BAC ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1. Montrer que, pour tout x de $[-2\,;4]$, $\quad f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[-2\,;4]$. On donnera les valeurs exactes de $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(4)$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que $f''(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$, puis étudier la convexité de f sur $[-2\,;4]$.
5. Préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur $[-2\,;4]$, puis en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} à l'aide de la calculatrice.

EXERCICE 31 - TYPE BAC ⋆⋆

On dispose d'une plaque de carton carrée de 20 cm de côté. On découpe à chaque coin un carré de côté x, exprimé en centimètres, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.



1. Justifier que x doit appartenir à l'intervalle $[0\,;10]$.
2. Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x, puis montrer que son volume, en cm^3, est donné par $V(x) = x(20-2x)^2$.
3. Montrer que $V'(x) = (20-2x)(20-6x)$.
4. Étudier le signe de $V'(x)$ sur $[0\,;10]$, puis dresser le tableau de variations de V.
5. En déduire la valeur exacte de x pour laquelle le volume est maximal, ainsi que la valeur exacte de ce volume maximal. On en donnera une valeur approchée au cm^3 près.
6. Montrer que l'équation $V(x) = 400$ admet exactement deux solutions sur $[0\,;10]$, puis en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
7. Étudier la convexité de V sur $[0\,;10]$ et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

EXERCICE 32 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 + 2x^2 - 2$.

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. Calculer $g(0)$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
3. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.
4. Montrer que $\alpha \in]0{,}8\,;0{,}9[$, puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$, que l'on présentera dans un tableau.

Partie B : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 4x + \dfrac{4}{x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

6. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}_f$?
7. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\quad f'(x) = \dfrac{2\,g(x)}{x^2}$.
8. En déduire le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variations complet.
9. Justifier que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$, atteint en α, et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
10. Montrer que $f''(x) = 2 + \dfrac{8}{x^3}$, puis étudier la convexité de f sur $]0\,;+\infty[$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?
11. Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 33 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x+5}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$.
3. Montrer que, pour tout x de $[0\,;5]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 5$.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\quad f(x) - x = \dfrac{-(x-5)(x+1)}{\sqrt{4x+5}+x}$, puis en déduire le signe de $f(x)-x$ sur $[0\,;5]$.
5. Montrer que $f''(x) = -\dfrac{4}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}$ et en déduire la convexité de f.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n+5}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Calculer u_1, u_2 et u_3, arrondis à 10^{-3}. Que peut-on conjecturer ?
7. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$$

On utilisera les questions 1., 3. et 4. de la partie A.

8. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
9. On note ℓ sa limite. Justifier, à l'aide de la continuité de f, que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$, puis déterminer ℓ.
10. Recopier et compléter le script Python suivant, qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > s$:

```
from math import sqrt

def seuil(s):
    u = 0
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

11. Que renvoie l'appel `seuil(4.999)` ? Pourquoi l'appel `seuil(5)` serait-il problématique ?

EXERCICE 34 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+2}{1-2x^2}$ vaut	$-\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2}$ vaut	$+\infty$	$-\infty$	0
3. La dérivée de $x \mapsto (x^2+1)^3$ est	$3(x^2+1)^2$	$6x(x^2+1)^2$	$6x(x^2+1)^3$
4. La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-3x+1}$ est	$-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}$	e^{-3x+1}	$-3\,\mathrm{e}^{-3}$
5. Si $f''(x) = 6x - 12$ sur $\mathbb{R}$, alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse	0	2	elle n'en admet pas
6. La fonction $x \mapsto x^4$ est	convexe sur $\mathbb{R}$	concave sur $\mathbb{R}$	concave puis convexe
7. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer	l'existence d'une solution	l'unicité d'une solution	l'existence et l'unicité
8. Si f est continue sur $[0\,;1]$ avec $f(0) = -1$ et $f(1) = 3$, alors f	s'annule au moins une fois	s'annule exactement une fois	ne s'annule pas nécessairement

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Limites et expressions conjuguées.

1. Soit $x > 0$. Montrer que $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.
2. En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

   puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

3. On pose $\varphi(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ pour $x > 0$.
   (a) Montrer que $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
   (b) Justifier que $0 < \varphi(x) < \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
   (c) Interpréter graphiquement ce résultat, en comparant la courbe de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et la droite d'équation $y = x$.
4. On pose $\psi(x) = \sqrt{x^2+x} - x$ pour $x > 0$.

(a) Montrer que $\psi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$.

(b) Justifier que, pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$, puis en déduire que $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$.

(c) On admet que $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$.

(d) Comparer avec le résultat de la question 3. et commenter.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Une inégalité obtenue par la convexité.
Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{1+x}$, de courbe $\mathcal{C}_g$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ puis $g''(x) = -\dfrac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$.
2. En déduire que g est concave sur $[0\,;+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.
4. En déduire, sans nouveau calcul, que pour tout $x \geqslant 0$:
$$\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$$
5. Retrouver cette inégalité en étudiant les variations de la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \sqrt{1+x}$.
6. **Application.** En prenant $x = 0{,}02$, donner une majoration décimale de $\sqrt{1{,}02}$. Comparer à la valeur affichée par la calculatrice, et estimer l'erreur commise.
7. L'inégalité reste-t-elle valable pour $-1 \leqslant x < 0$? Justifier à l'aide de la concavité.

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0. On suppose que les courbes représentatives des trois fonctions f, g et $\dfrac{fg}{2}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0. Quelles sont les équations possibles pour cette tangente ?

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Pour tout entier naturel n, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, obtenue en dérivant n fois la fonction f, avec la convention $f^{(0)} = f$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\text{pour tout réel } x, \qquad f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Expliciter P_0, P_1 et P_2.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels x et y :

$$|f(y) - f(x)| \leqslant (y-x)^2$$

Montrer que f est constante.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

Le nombre de racines réelles d'une équation de degré 3. Soient p et q deux réels et, pour x réel, $f(x) = x^3 + px + q$. On se propose de déterminer le nombre de réels x tels que $f(x) = 0$.

1. On suppose $p \geqslant 0$. Dresser le tableau de variations de f et conclure dans ce cas.
2. On suppose $p < 0$. Dresser le tableau de variations de f.
3. On suppose $p < 0$. Soient x_1 et x_2 les réels en lesquels f' s'annule. Calculer $f(x_1) \times f(x_2)$ en fonction de p et q.
4. Déterminer, en fonction de la quantité

$$\Delta = -\left(4p^3 + 27q^2\right)$$

le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$. On montrera en particulier que, si $\Delta < 0$, l'équation admet une unique racine réelle.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer que f admet un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe x dans $[a\,;b]$ tel que $f(x) = x$. On écrira cette équation sous la forme $g(x) = 0$ pour une certaine fonction g.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆⋆

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et qui ne s'annule pas sur I, on appelle *dérivée logarithmique* de f la fonction $\dfrac{f'}{f}$.

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et qui ne s'annulent pas sur I. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonction de celles de u et de v.
2. Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ des nombres réels et P la fonction polynôme définie par :

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

Calculer la dérivée logarithmique de P sur chacun des intervalles où cette fonction est définie.

4. Dresser le tableau de variations de $\dfrac{P'}{P}$.
5. Pour α réel, quel est le nombre de racines de l'équation $P'(x) - \alpha P(x) = 0$?

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Inégalité des accroissements finis. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, m et M deux réels, et f une fonction dérivable sur $[a\,;b]$.

1. On suppose que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a\,;b]$. Montrer que :

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

On pourra considérer les fonctions $g : x \mapsto f(x) - Mx$ et $h : x \mapsto f(x) - mx$.

2. Soit $K \geqslant 0$. On suppose que $|f'(x)| \leqslant K$ pour tout $x \in [a\,;b]$. Montrer que

$$|f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b - a|$$

puis que, pour tous x et y de $[a\,;b]$:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y - x|$$

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆⋆

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, $K \in [0\,;1[$ et f une fonction dérivable sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$, telle que :

$$\text{pour tout } x \in [a\,;b], \qquad |f'(x)| \leqslant K$$

On sait depuis l'exercice 41 que f admet un point fixe $c \in [a\,;b]$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [a\,;b]$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. En utilisant l'exercice 43, montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|u_n - c| \leqslant K^n\,|u_0 - c|$$

Qu'en déduit-on sur la suite (u_n) ?

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Calcul d'une racine carrée par la méthode de Newton.

Partie A

1. Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, et x_0 un élément de I tel que $f'(x_0) \neq 0$. Calculer l'abscisse x_1 du point en lequel la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 coupe l'axe des abscisses.
2. On suppose que a est un réel positif, et que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - a$. Avec les notations précédentes, vérifier que :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$

Partie B

Soit a un réel strictement positif. La suite (u_n) est définie par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = f_a(u_n)$$

où la fonction f_a est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_a(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

3. Étudier f_a et donner sommairement l'allure de sa courbe.
4. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs strictement positives.
5. Établir les inégalités :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad f_a(x) \geqslant \sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } x \geqslant \sqrt{a}, \quad f_a(x) \leqslant x$$

6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.
7. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$ pour tout entier naturel n.
8. Exprimer v_n en fonction de n.
9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant (u_1 + \sqrt{a})\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$$

   Conclure que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
10. On prend $a = 2$ et $u_0 = 1$. Représenter graphiquement la fonction f_2 et les premiers termes de la suite (u_n). Écrire l'inégalité de la question précédente dans ce cas. Comment choisir n pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près ? Faire les calculs correspondants.