CORRIGÉ – CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Repères, bases et coordonnées

EXERCICE 1 ⋆

1. Le point E n'appartient pas au plan (ABD), qui est la face inférieure du cube : les quatre points A, B, D et E ne sont donc pas coplanaires, et $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est bien un repère de l'espace. L'arête du cube valant 1, les trois vecteurs sont de norme 1 ; ils portent par ailleurs trois arêtes issues du même sommet d'un cube, donc sont orthogonaux deux à deux.

   $\boxed{\text{Le repère est orthonormé.}}$

2. On lit les coordonnées en décomposant chaque vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur la base :

   - $A(0\,;0\,;0)$
   - $B(1\,;0\,;0)$
   - $C(1\,;1\,;0)$
   - $D(0\,;1\,;0)$
   - $E(0\,;0\,;1)$
   - $F(1\,;0\,;1)$
   - $G(1\,;1\,;1)$
   - $H(0\,;1\,;1)$

   Repère de lecture : la première coordonnée se déplace de A vers B, la deuxième de A vers D, la troisième de A vers E. Les quatre sommets du bas ont donc une cote nulle, les quatre du haut une cote égale à 1.

3. Un milieu s'obtient en faisant la moyenne des coordonnées.

   (a) I est le milieu de $[EG]$: $\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)}$

   (b) Ω est le milieu de $[AG]$: $\boxed{\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$

   (c) J est le milieu de $[BC]$: $\boxed{J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)}$

   (d) K est le milieu de $[CG]$: $\boxed{K\left(1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)}$

4. $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$, donc $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$. Comme A est l'origine :

   $\boxed{L\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)}$

EXERCICE 2 ⋆

On utilise systématiquement la relation de Chasles, ainsi que les égalités $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$, etc., qui traduisent le parallélisme des arêtes.

a) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}$

b) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\boxed{-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}$

c) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\boxed{-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}$

d) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \boxed{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}$

e) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$

f) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \boxed{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$

g) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}}$

h) $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} = \boxed{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$

i) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}$

On remarque que $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$: les deux diagonales sont portées par des faces parallèles, ce que la décomposition rend évident.

EXERCICE 3 ⋆

1. On soustrait les coordonnées du point de départ à celles du point d'arrivée :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\7\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\9\\-5\end{pmatrix}}$ $\qquad 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}6\\4\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\-12\\-3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\16\\-5\end{pmatrix}}$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\7\\-1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-5\\\frac{15}{2}\\0\end{pmatrix}}$$

3. $\boxed{M\left(\frac{5}{2}\,;-1\,;1\right)}$ et $\boxed{N\left(-1\,;3\,;\frac{3}{2}\right)}$

4. $ABEC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$, donc $E = C + \overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{E(1\,;7\,;-2)}$$

5. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$, donc $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}6\\4\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\-9\end{pmatrix}$. En ajoutant à A :

$$\boxed{F(9\,;-2\,;-6)}$$

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
   (a) $\vec{v} = -3\,\vec{u}$: $\boxed{\text{colinéaires}}$
   (b) Le coefficient serait 3 d'après les deux premières coordonnées, mais $3 \times (-1) = -3 \neq -2$: $\boxed{\text{non colinéaires}}$
   (c) $\vec{v} = -\frac{3}{2}\,\vec{u}$ (la première coordonnée, nulle des deux côtés, ne pose aucune difficulté) : $\boxed{\text{colinéaires}}$

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\9\\-6\end{pmatrix} = 3\,\overrightarrow{AB}$:

$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$. Le coefficient serait -1 d'après les deux premières coordonnées, mais $-1 \times (-1) = 1 \neq 2$:

$\boxed{\text{les trois points ne sont pas alignés.}}$

4. Les deux dernières coordonnées imposent $\dfrac{-4}{2} = \dfrac{2}{-1} = -2$, donc le coefficient est -2 et $6 = -2m$:

$\boxed{m = -3}$

5. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires.

$\boxed{(AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles.}}$

Sont-elles confondues ? On teste si C appartient à (AB) : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (la deuxième coordonnée est nulle sans que les autres le soient).

$\boxed{\text{Les droites sont strictement parallèles.}}$

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. (a) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. On cherche a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$:

$$\begin{cases} 3 = a \\ 1 = b \\ 5 = a + 2b \end{cases}$$

Les deux premières donnent $a = 3$ et $b = 1$. Test dans la troisième : $3 + 2 = 5$, vérifié.

$\boxed{\text{Les trois vecteurs sont coplanaires, et } \vec{u} = 3\vec{v} + \vec{w}.}$

(b) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{cases} 2 = a \\ -1 = a + b \\ 4 = 2b \end{cases}$$

Les deux premières donnent $a = 2$ et $b = -3$. Test dans la troisième : $2 \times (-3) = -6 \neq 4$.

$\boxed{\text{Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.}}$

(c) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{cases} 1 = 2a \\ -1 = a + 3b \\ 2 = -4b \end{cases}$$

La première donne $a = \frac{1}{2}$, la troisième $b = -\frac{1}{2}$. Test dans la deuxième : $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$, vérifié.

$$\boxed{\text{Les trois vecteurs sont coplanaires.}}$$

2. Quatre points sont coplanaires si et seulement si les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ le sont. Ici $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 0 = -a - b \\ 1 = a \\ -1 = b \end{cases}$$

Les deux dernières donnent $a = 1$ et $b = -1$. Test dans la première : $-1 + 1 = 0$, vérifié.

$$\boxed{\text{Les quatre points sont coplanaires.}}$$

3. Cette fois $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, d'où $a = 1$, $b = 1$ et, dans la première équation, $-1 - 1 = -2 \neq 0$:

$$\boxed{\text{Les quatre points ne sont pas coplanaires.}}$$

4. Ici la méthode ne s'applique pas telle quelle, car $\vec{v} = 2\vec{u}$: les deux premiers vecteurs sont colinéaires. Mais c'est justement ce qui permet de conclure immédiatement.
   En effet, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même direction, il suffit d'un plan contenant cette direction et celle de $\vec{w}$ pour les contenir tous les trois.

$$\boxed{\text{Les trois vecteurs sont coplanaires.}}$$

Le cours le signalait : deux vecteurs colinéaires sont toujours coplanaires avec n'importe quel troisième.

Produit scalaire, normes et distances

EXERCICE 6 ⋆

1. Le repère étant orthonormé, on applique $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 4 - 6 = \boxed{-8} \qquad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 - 3 + 3 = \boxed{0} \qquad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 + 12 - 2 = \boxed{10}$$

2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \boxed{\sqrt{14}}$ $\qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \boxed{\sqrt{21}}$ $\qquad \|\vec{w}\| = \sqrt{0 + 9 + 1} = \boxed{\sqrt{10}}$

3. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{w}$ est nul :

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont orthogonaux}}$$

Les deux autres produits ne le sont pas.

4. **Première méthode :** $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}1\\7\\-1\end{pmatrix}$, donc $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=2-7-3=-8$.

   Seconde méthode : par bilinéarité, $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=-8+0=-8$.

   $$\boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=-8}$$

5. **Par les coordonnées :** $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$, donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}$.

   Par l'identité :

   $$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=14+2\times(-8)+21=19$$

   $$\boxed{\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{19}}$$

EXERCICE 7 ⋆

1. Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
   (a) $3-2-1=0$: $\boxed{\text{orthogonaux}}$
   (b) $2+0-3=-1\neq 0$: $\boxed{\text{non orthogonaux}}$
   (c) $-6+2+4=0$: $\boxed{\text{orthogonaux}}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=3m-2+2=3m$, qui s'annule pour $\boxed{m=0}$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=2+3m-2m=m+2$, qui s'annule pour $\boxed{m=-2}$.
4. On cherche $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vérifiant les deux conditions :

   $$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=a+b=0\\ \vec{n}\cdot\vec{v}=b+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}b=-a\\ c=-b=a\end{cases}$$

   Il suffit de choisir une valeur non nulle de a, par exemple $a=1$:

   $$\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\text{ convient}}$$

   Vérification : $1-1+0=0$ et $0-1+1=0$. Tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ convient également : il y en a une infinité.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, d'où

   $$AB=\sqrt{4+1+4}=3\qquad AC=\sqrt{1+4+4}=3\qquad BC=\left\|\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 + 2 - 4 = 0$$

Le produit scalaire est nul et les deux côtés issus de A sont de même longueur :

$$\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle isocèle en } A.}$$

Vérification par Pythagore : $3^2 + 3^2 = 18 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$, d'où

$$AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \qquad AC = \sqrt{11} \qquad BC = \sqrt{11}$$

Deux côtés ont la même longueur :

$$\boxed{ABC \text{ est isocèle en } C.}$$

Il n'est pas rectangle : $AC^2 + BC^2 = 22 \neq 12$, et aucun autre couple ne convient.

3. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3 - 1 + 3 = 5$ et

$$\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{5}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{5}{11} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\widehat{ACB} \approx 63^\circ}$$

4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs étant égaux :

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

Pour savoir s'il s'agit d'un losange, on compare deux côtés consécutifs :

$$AB = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \qquad \text{et} \qquad BC = \left\|\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\| = 3$$

Ces longueurs diffèrent : $\boxed{ABCD \text{ n'est pas un losange.}}$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. On applique directement les identités du cours :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 16 + 2 \times (-5) + 9 = 15 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{15}}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 16 - 2 \times (-5) + 9 = 35 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{35}}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 16 - 9 = \boxed{7}$$

2. L'identité du parallélogramme affirme que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$:

$$15 + 35 = 50 \qquad \text{et} \qquad 2(16 + 9) = 50 \qquad \boxed{\text{l'identité est vérifiée.}}$$

3. De $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ on tire :

$$36 = 4 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 25 \iff 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 7 \iff \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{7}{2}}$$

Puis $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4 - 7 + 25 = 22$, soit $\boxed{\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{22}}$.

4. Supposons $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Alors :

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$$

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v} \text{ et } \vec{u}-\vec{v} \text{ sont orthogonaux.}}$$

Interprétation. Dans le parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les diagonales sont portées par $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$. Dire que les quatre côtés ont la même longueur, c'est dire que le parallélogramme est un losange : on retrouve donc que *les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.*

EXERCICE 10 ⋆⋆

On travaille avec les coordonnées de l'exercice 1.

1. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC} = 1+1+0 = \boxed{2} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB} = 1+0+0 = \boxed{1}$$

2. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc

$$BD = DE = BE = \sqrt{2}$$

$$\boxed{BDE \text{ est un triangle équilatéral de côté } \sqrt{2}.}$$

Ce sont trois diagonales de faces du cube, toutes de même longueur.

3. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = -1+1+0 = \boxed{0}$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = -1+0+1 = \boxed{0}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE). Tout vecteur de ce plan étant combinaison linéaire de ces deux-là, $\overrightarrow{AG}$ leur est orthogonal à tous :

$$\boxed{(AG) \text{ est orthogonale au plan } (BDE), \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ en est un vecteur normal.}}$$

4. $\cos\left(\widehat{GAB}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}}{AG\times AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}\times 1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$, d'où

$$\boxed{\widehat{GAB} \approx 55°}$$

5. $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$:

$$AF = AH = FH = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\text{Oui, } AFH \text{ est équilatéral}}$$

pour la même raison qu'à la question 2 : ses trois côtés sont des diagonales de faces.

EXERCICE 11 ⋆

On raisonne sur les coordonnées de l'exercice 1. Deux droites sont parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires ; sinon, elles sont sécantes si elles ont un point commun, et non coplanaires dans le cas contraire.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = -\overrightarrow{AB}$: parallèles, donc coplanaires — elles engendrent le plan $(ABGH)$.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Tout point de (AB) a pour ordonnée 0, tout point de (CG) a pour ordonnée 1 : elles n'ont aucun point commun. Non coplanaires.
C'est l'exemple du cours : sur la figure, les deux droites semblent se croiser.

c) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$: parallèles.

d) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$: parallèles.

e) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$: parallèles.

f) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Le point $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ appartient aux deux (il correspond au paramètre $\frac{1}{2}$ dans chaque cas) :

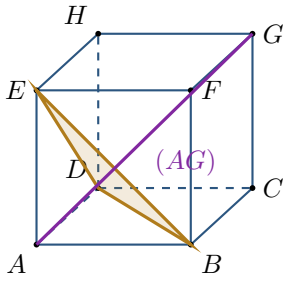
sécantes au centre Ω du cube.

g) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$: parallèles.

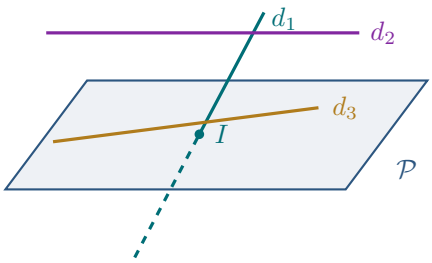
h) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Tout point de (AE) a pour abscisse 0 et pour ordonnée 0 ; tout point de (CD) a pour ordonnée 1 : aucun point commun. Non coplanaires.

EXERCICE 12 ⋆

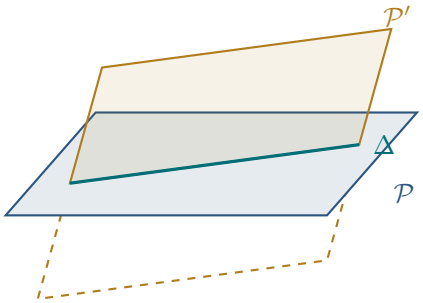
1. Le cube, la diagonale (AG) en violet et le triangle BDE en ocre. On notera que $[BD]$ et $[DE]$ sont partiellement cachés.



2. Un plan se représente par un parallélogramme. La droite d_1 le traverse : la partie située derrière le plan est en pointillés. La droite d_2 passe au-dessus sans le rencontrer. La droite d_3 est tracée entièrement à l'intérieur du parallélogramme.

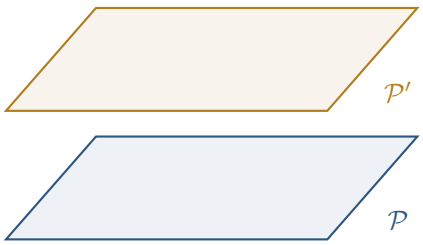


3. Deux plans sécants et leur droite d'intersection Δ :

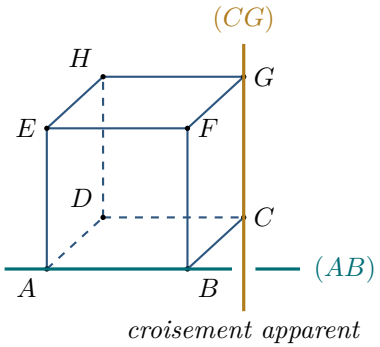


Convention de dessin : le plan $\mathcal{P}$ étant opaque, la moitié de $\mathcal{P}'$ qui passe en dessous est **cachée** : on la trace en pointillés. C'est ce contraste qui fait comprendre au lecteur que les deux plans se traversent, et non qu'ils se contentent de se toucher.

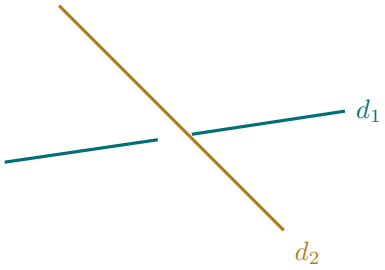
4. Deux plans strictement parallèles : aucun point commun, donc aucune droite d'intersection.



5. Deux droites non coplanaires. On matérialise le passage de l'une au-dessus de l'autre par une interruption du tracé.
La façon la plus sûre de représenter deux droites non coplanaires est de s'appuyer sur un solide, dont les arêtes cachées lèvent toute ambiguïté. Sur le cube ci-dessous, (AB) et (CG) conviennent : c'est l'exemple du cours.



Sans solide de référence, on interrompt la droite qui passe **derrière**, exactement comme pour les arêtes cachées :



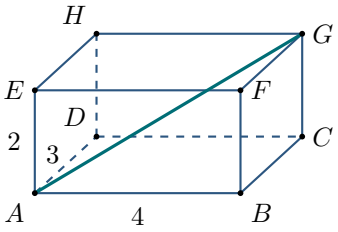
Ici d_2 passe *devant* d_1 : c'est donc d_1, située derrière, dont le tracé est interrompu. Les deux droites ne se coupent pas.

Pourquoi le dessin ne suffit pas. Un dessin est une projection de l'espace sur une feuille : deux droites qui n'ont aucun point commun peuvent parfaitement avoir des projections qui se coupent. Seul un calcul — la recherche d'un point commun, ou le test de coplanarité des vecteurs — permet de trancher.

6. La section du cube par le plan (BDE) est le triangle équilatéral BDE de l'exercice 10, que l'on a hachuré sur la figure de la question 1.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. La figure est celle d'un pavé droit, obtenue comme le cube mais avec des arêtes de longueurs différentes.



2. Les trois vecteurs $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ sont de norme 1, et portent trois arêtes issues de A d'un pavé *droit* : ils sont donc orthogonaux deux à deux. Le repère est orthonormé.

- $A(0\,;0\,;0)$
- $B(4\,;0\,;0)$
- $C(4\,;3\,;0)$
- $D(0\,;3\,;0)$
- $E(0\,;0\,;2)$
- $F(4\,;0\,;2)$
- $G(4\,;3\,;2)$
- $H(0\,;3\,;2)$

3. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$, donc $AG = \sqrt{16+9+4} = \boxed{\sqrt{29} \approx 5{,}39 \text{ cm}}$

4. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Cherchons un point commun : (AG) est l'ensemble des points $(4t\,;3t\,;2t)$ et (BH) celui des points $(4-4s\,;3s\,;2s)$. L'égalité des deuxièmes coordonnées donne $t=s$, et celle des premières $4t=4-4t$, soit $t=\frac{1}{2}$. Les troisièmes coordonnées coïncident alors.

$$\boxed{\text{Les droites sont sécantes au centre } \left(2\,;\frac{3}{2}\,;1\right) \text{ du pavé.}}$$

5. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Tout point de (AB) a pour ordonnée 0, tout point de (CG) a pour ordonnée 3 : aucun point commun.

$$\boxed{\text{Les droites } (AB) \text{ et } (CG) \text{ sont non coplanaires.}}$$

Ce que la figure laissait croire. Sur le dessin, les segments $[AB]$ et $[CG]$ semblent se croiser au voisinage de B : c'est un pur effet de la projection. La droite (CG) passe en réalité *derrière* (AB).

6. $\cos\left(\widehat{GAB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}}{AG\times AB}=\dfrac{16}{\sqrt{29}\times 4}=\dfrac{4}{\sqrt{29}}\approx 0{,}743$, d'où

$$\boxed{\widehat{GAB}\approx 42^\circ}$$

Équations de plans et représentations paramétriques

EXERCICE 14 ⋆

Un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *admet une équation de la forme* $ax+by+cz+d=0$ *: on lit donc les trois premiers coefficients sur* $\vec{n}$*, et l'on détermine* d *en écrivant que le point donné appartient au plan.*

1. L'équation est de la forme $2x-y+3z+d=0$. Avec $A(1\,;2\,;-1)$:

$$2-2-3+d=0 \iff d=3 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{2x-y+3z+3=0}$$

2. L'équation est de la forme $x+y+z+d=0$, et le plan passe par l'origine, donc $d=0$:

$$\boxed{x+y+z=0}$$

3. L'équation est de la forme $y-z+d=0$ (le coefficient de x est nul). Avec $A(3\,;-2\,;1)$: $-2-1+d=0$, soit $d=3$:

$$\boxed{y-z+3=0}$$

4. Deux plans parallèles ont le même vecteur normal, donc les mêmes coefficients a, b et c. L'équation est de la forme $2x+3y-z+d=0$, et avec $A(1\,;1\,;1)$:

$$2+3-1+d=0 \iff d=-4 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{2x+3y-z-4=0}$$

5. Un plan perpendiculaire à une droite admet le vecteur directeur de celle-ci pour vecteur normal. L'équation est de la forme $4x - z + d = 0$, et avec $A(0\,;2\,;-3)$:

$$0 + 3 + d = 0 \iff d = -3 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{4x - z - 3 = 0}$$

EXERCICE 15 ⋆

1. On lit les coefficients de x, y et z : $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}$

2. On remplace dans l'équation :
   - $A(1\,;0\,;3)$: $3 - 0 + 3 - 6 = 0$, donc $\boxed{A \in \mathcal{P}}$;
   - $B(2\,;1\,;1)$: $6 - 2 + 1 - 6 = -1 \neq 0$, donc $\boxed{B \notin \mathcal{P}}$;
   - $C(0\,;-3\,;0)$: $0 + 6 + 0 - 6 = 0$, donc $\boxed{C \in \mathcal{P}}$.

3. Sur l'axe des abscisses, $y = z = 0$: $3x - 6 = 0$ donne $\boxed{(2\,;0\,;0)}$.

   Sur l'axe des ordonnées, $x = z = 0$: $-2y - 6 = 0$ donne $\boxed{(0\,;-3\,;0)}$.

   Sur l'axe des cotes, $x = y = 0$: $z - 6 = 0$ donne $\boxed{(0\,;0\,;6)}$.

4. L'équation est de la forme $3x - 2y + z + d = 0$, et avec $B(2\,;1\,;1)$:

$$6 - 2 + 1 + d = 0 \iff d = -5 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{3x - 2y + z - 5 = 0}$$

5. Le second plan a pour vecteur normal $\vec{n}'\begin{pmatrix}-6\\4\\-2\end{pmatrix} = -2\,\vec{n}$: les deux vecteurs normaux sont colinéaires, donc $\boxed{\text{les plans sont parallèles.}}$

   En multipliant la première équation par -2, on obtient $-6x + 4y - 2z + 12 = 0$, alors que la seconde est $-6x + 4y - 2z + 1 = 0$. Les constantes diffèrent :

$$\boxed{\text{les plans sont strictement parallèles, donc non confondus.}}$$

EXERCICE 16 ⋆

1. $\boxed{\begin{cases}x = 2 + t\\y = 1 - 2t\\z = -3 + 4t\end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$

2. $\boxed{\begin{cases}x = 2t\\y = 0\\z = 1 - t\end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$, d'où $\boxed{\begin{cases}x = 1 + 3t\\y = 2 - 2t\\z = 5t\end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$

4. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$, d'où $\boxed{\begin{cases}x=-1+2t\\y=3\\z=2-4t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}}$

   On remarque que l'ordonnée est constante : tous les points de cette droite ont pour ordonnée 3, la droite est donc contenue dans le plan d'équation $y=3$, parallèle au plan (xOz).

5. Pour $M(5\,;-5\,;9)$: la première équation donne $2+t=5$, soit $t=3$. On teste alors les deux autres : $1-2\times 3=-5$ et $-3+4\times 3=9$. Les trois coordonnées conviennent :

   $$\boxed{M \text{ appartient à la droite.}}$$

   Pour $N(4\,;-3\,;1)$: la première équation donne $t=2$, et $1-4=-3$ convient, mais $-3+8=5\neq 1$:

   $$\boxed{N \text{ n'appartient pas à la droite.}}$$

   Il faut impérativement tester les trois coordonnées avec la même valeur du paramètre.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée est nulle pour l'un et pas pour l'autre), donc A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent bien un plan.

   (b) Voir ci-dessus.

   (c) On cherche $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal à ces deux vecteurs :

   $$\begin{cases}-a+2b=0\\-a+3c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=2b\\a=3c\end{cases}$$

   En choisissant $c=2$, on obtient $a=6$ puis $b=3$:

   $$\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}}$$

   (d) L'équation est de la forme $6x+3y+2z+d=0$, et avec $A(1\,;0\,;0)$: $6+d=0$, soit $d=-6$:

   $$\boxed{(ABC):6x+3y+2z-6=0}$$

   Vérifications : pour $B(0\,;2\,;0)$, $6-6=0$; pour $C(0\,;0\,;3)$, $6-6=0$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$. On cherche $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$:

   $$\begin{cases}a-b+c=0\\-a+2c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=2c\\b=a+c=3c\end{cases}$$

   En choisissant $c=1$: $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$. L'équation est de la forme $2x+3y+z+d=0$, et avec $A(1\,;1\,;0)$: $2+3+d=0$, soit $d=-5$:

   $$\boxed{2x+3y+z-5=0}$$

   Vérifications : B donne $4+0+1-5=0$ et C donne $0+3+2-5=0$.

3. $D(3\,;-1\,;1)$: $6-3+1-5=-1\neq 0$, donc $\boxed{D \text{ n'appartient pas au plan.}}$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, d'où $\boxed{(AB):\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=2-t\end{cases}}$

2. Pour $C(-1\,;-2\,;3)$: la première équation donne $1+2t=-1$, soit $t=-1$. On vérifie : $-1-1=-2$ et $2+1=3$. Les trois coordonnées conviennent.

$$\boxed{C \text{ appartient à } (AB),\ \text{donc } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$$

3. Une parallèle a le même vecteur directeur : $\boxed{\Delta:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}}$

4. On teste si $D(2\,;1\,;0)$ appartient à (AB) : la première équation donne $1+2t=2$, soit $t=\frac{1}{2}$, mais alors $y=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\neq 1$.

$$\boxed{\text{Les droites sont strictement parallèles, donc non confondues.}}$$

5. Le plan cherché admet $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal. Son équation est de la forme $2x+y-z+d=0$, et avec $D(2\,;1\,;0)$: $4+1-0+d=0$, soit $d=-5$:

$$\boxed{2x+y-z-5=0}$$

Positions relatives

EXERCICE 19 ⋆

On calcule d'abord $\vec{u}\cdot\vec{n}$. S'il est non nul, la droite perce le plan ; s'il est nul, il reste à tester si un point de la droite appartient au plan.

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ donnent $\vec{u}\cdot\vec{n}=1+2-3=0$: la droite est parallèle au plan ou contenue dedans. Le point $A(2\,;-1\,;0)$ de $\mathcal{D}$ vérifie $2-2-0+1=1\neq 0$:

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est strictement parallèle à } \mathcal{P}.}$$

2. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ donnent $\vec{u}\cdot\vec{n}=2-1+2=3\neq 0$: la droite et le plan sont sécants. On reporte dans l'équation du plan :

$$(1+2t)-t+2(-1+t)-3=0 \iff 3t-4=0 \iff t=\frac{4}{3}$$

$$\boxed{\text{Point d'intersection : } \left(\frac{11}{3}\,;\frac{4}{3}\,;\frac{1}{3}\right)}$$

3. $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ donnent $\vec{u}\cdot\vec{n} = 3-2-1 = 0$. Le point $A(0\,;1\,;3)$ de $\mathcal{D}$ vérifie $0+1-3+2 = 0$:

$\boxed{\mathcal{D} \text{ est contenue dans } \mathcal{P}.}$

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}-4\\2\\-6\end{pmatrix} = -2\,\vec{n}$: les plans sont parallèles. En multipliant la première équation par -2 : $-4x+2y-6z+2=0$, à comparer à $+5$.

$\boxed{\text{Strictement parallèles.}}$

2. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires :

$\boxed{\text{Sécants, selon une droite.}}$

3. $\vec{n}'\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = -3\,\vec{n}$, et la seconde équation est exactement -3 fois la première :

$\boxed{\text{Confondus.}}$

4. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires :

$\boxed{\text{Sécants.}}$

On remarque que $\vec{n}\cdot\vec{n}' = 0$: ces deux plans sont même perpendiculaires.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. On lit directement dans les représentations paramétriques :

	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_4$
Point	$A(1\,;0\,;2)$	$B(2\,;1\,;1)$	$C(0\,;1\,;0)$	$E(3\,;0\,;4)$
Vecteur directeur	$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$

2. Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Cherchons un point commun :

$$\begin{cases}1+t = 2+s\\ t = 1+2s\\ 2-t = 1+s\end{cases}$$

En reportant $t = 1+2s$ dans la première : $2+2s = 2+s$, soit $s=0$, donc $t=1$. On teste dans la troisième : $2-1=1$ et $1+0=1$, égalité vérifiée.

$\boxed{\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 \text{ sont sécantes en } (2\,;1\,;1).}$

3. Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Cherchons un point commun :

$$\begin{cases} 1+t=s \\ t=1+s \\ 2-t=s \end{cases}$$

La première donne $s=1+t$, que l'on reporte dans la deuxième : $t=1+1+t$, soit $0=2$, ce qui est impossible. Il n'existe aucun point commun.

$\boxed{\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_3 \text{ sont non coplanaires.}}$

4. Le vecteur directeur de $\mathcal{D}_4$ vaut -2 fois celui de $\mathcal{D}_1$: les droites sont parallèles. Le point $E(3\,;0\,;4)$ appartient-il à $\mathcal{D}_1$? La première équation donne $1+t=3$, soit $t=2$, mais alors $y=2\neq 0$.

$\boxed{\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_4 \text{ sont strictement parallèles.}}$

5.

Couple	Directeurs colinéaires ?	Point commun ?	Position relative
$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$	non	oui	sécantes (coplanaires)
$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3$	non	non	non coplanaires
$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_4$	oui	non	strictement parallèles

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires :

$\boxed{\text{les deux plans sont sécants, et leur intersection est une droite.}}$

2. Avec $z=t$, le système devient :

$$\begin{cases} x+y=3-t \\ x-y=1-2t \end{cases}$$

En additionnant : $2x=4-3t$, donc $x=2-\dfrac{3}{2}t$. En soustrayant : $2y=2+t$, donc $y=1+\dfrac{1}{2}t$.

3. $\boxed{\Delta : \begin{cases} x=2-\frac{3}{2}t \\ y=1+\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases}}$

En posant $t=2t'$ pour éliminer les fractions, on obtient la représentation plus commode

$$(2-3t'\,;\ 1+t'\,;\ 2t')$$

d'où le vecteur directeur $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}}$

4. $\vec{u}\cdot\vec{n}=-3+1+2=0$ et $\vec{u}\cdot\vec{n}'=-3-1+4=0$.
C'était prévisible : Δ est contenue dans chacun des deux plans, donc $\vec{u}$ est un vecteur de chacun d'eux, et il est par définition orthogonal à leurs vecteurs normaux.

5. $K(-1\,;2\,;2)$: avec la seconde représentation, $2t' = 2$ donne $t' = 1$, et l'on vérifie $2 - 3 = -1$ et $1 + 1 = 2$.

$$\boxed{K \text{ appartient à } \Delta.}$$

Vérification directe : $-1 + 2 + 2 - 3 = 0$ et $-1 - 2 + 4 - 1 = 0$.

Projeté orthogonal et distance à un plan

EXERCICE 23 ⋆

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$. La droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$ est $(1+t\,;2-2t\,;3+2t)$. En reportant dans l'équation du plan :

$$(1+t) - 2(2-2t) + 2(3+2t) - 5 = 9t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{9}$$

$$\boxed{H\left(\frac{11}{9}\,;\frac{14}{9}\,;\frac{31}{9}\right)} \qquad \text{et} \qquad MH = |t| \times \|\vec{n}\| = \frac{2}{9} \times 3 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

2. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, droite $(2t\,;t\,;-2t)$:

$$4t + t + 4t + 6 = 9t + 6 = 0 \iff t = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{H\left(-\frac{4}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\right)} \qquad \text{et} \qquad MH = \frac{2}{3} \times 3 = \boxed{2}$$

3. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, droite $(2+t\,;-1+t\,;4+t)$:

$$(2+t) + (-1+t) + (4+t) - 1 = 3t + 4 = 0 \iff t = -\frac{4}{3}$$

$$\boxed{H\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{7}{3}\,;\frac{8}{3}\right)} \qquad \text{et} \qquad MH = \frac{4}{3} \times \sqrt{3} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

EXERCICE 24 ⋆

1. (a) $d = \dfrac{|2 - 1 + 2 - 3|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{0}{3} = \boxed{0}$.

Une distance nulle signifie que $\boxed{M \text{ appartient au plan.}}$

(b) $d = \dfrac{|0 - 0 + 10|}{\sqrt{9+0+16}} = \dfrac{10}{5} = \boxed{2}$

(c) $d = \dfrac{|2 + 6 + 2 + 1|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{11}{3} = \boxed{\dfrac{11}{3}}$

2. Reprenons les trois cas de l'exercice 23 :

$$\frac{|1-4+6-5|}{3}=\frac{2}{3} \qquad \frac{|0+0-0+6|}{3}=2 \qquad \frac{|2-1+4-1|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\text{Les trois distances sont confirmées.}}$$

3. Un point de l'axe (Oz) s'écrit $M(0\,;0\,;z)$. La condition s'écrit :

$$\frac{|0+0+2z-1|}{\sqrt{1+4+4}}=2 \iff |2z-1|=6 \iff 2z-1=6 \text{ ou } 2z-1=-6$$

$$\boxed{\left(0\,;0\,;\frac{7}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(0\,;0\,;-\frac{5}{2}\right)}$$

Il y a bien deux solutions : les deux points sont de part et d'autre du plan.

4. La formule donne uniquement la *longueur* MH, sans jamais faire intervenir les coordonnées de H. Pour obtenir le point lui-même, il faut construire la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$, puis chercher son intersection avec le plan : c'est la méthode en quatre étapes, seule capable de fournir H.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. L'exercice 10 a établi que $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$ et à $\overrightarrow{BE}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) : c'est donc un vecteur normal à ce plan. L'équation est de la forme $x+y+z+d=0$, et avec $B(1\,;0\,;0)$: $1+d=0$.

$$\boxed{(BDE) : x+y+z-1=0}$$

Vérifications : $D(0\,;1\,;0)$ et $E(0\,;0\,;1)$ donnent également $1-1=0$.

2. $d(A,(BDE))=\dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

3. $d(G,(BDE))=\dfrac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$, et $AG=\|\overrightarrow{AG}\|=\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{La somme des deux distances est égale à } AG.}$$

Interprétation. La droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) : les projetés orthogonaux de A et de G sont donc situés *sur* cette droite. Les deux distances sont alors deux portions du segment $[AG]$, coupé par le plan.

5. La droite passant par A et dirigée par $\vec{n}$ est $(t\,;t\,;t)$. En reportant :

$$3t-1=0 \iff t=\frac{1}{3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{K\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)}$$

6. La droite passant par G et dirigée par $\vec{n}$ est $(1+t\,;1+t\,;1+t)$, d'où $3(1+t)-1=0$, soit $t=-\frac{2}{3}$, et l'on retrouve le point $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{A,\ K \text{ et } G \text{ sont alignés : } K \text{ est le point où } (AG) \text{ perce le plan } (BDE).}$$

7. Le centre de gravité de BDE a pour coordonnées les moyennes de celles des trois sommets :

$$\left(\frac{1+0+0}{3}\,;\,\frac{0+1+0}{3}\,;\,\frac{0+0+1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)=\boxed{K}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A

1. I est le milieu de $[EF]$ avec $E(0\,;0\,;1)$ et $F(1\,;0\,;1)$, et J celui de $[FG]$ avec $G(1\,;1\,;1)$:

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)\qquad J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;1\right)}$$

2. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, d'où

$$AI=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}\qquad AJ=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\boxed{\frac{3}{2}}\qquad IJ=\sqrt{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

3. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}+0+1=\boxed{\frac{3}{2}}$, d'où

$$\cos\left(\widehat{IAJ}\right)=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 0{,}894\qquad\text{soit}\qquad\boxed{\widehat{IAJ}\approx 27^\circ}$$

Partie B

4. $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires : la deuxième coordonnée est nulle pour l'un et pas pour l'autre. Les trois points ne sont donc pas alignés et définissent un plan.

5. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AI}=2\times\frac{1}{2}-2\times 0-1\times 1=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AJ}=2-2\times\frac{1}{2}-1=0$.
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc à tout vecteur du plan :

$$\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\text{ est un vecteur normal au plan }(AIJ).}$$

6. L'équation est de la forme $2x-2y-z+d=0$, et le plan passe par $A(0\,;0\,;0)$, donc $d=0$:

$$\boxed{(AIJ):2x-2y-z=0}$$

Vérifications : I donne $1-0-1=0$ et J donne $2-1-1=0$.

Partie C

7. $d(G,(AIJ))=\dfrac{|2-2-1|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{1}{3}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

8. La droite passant par $G(1\,;1\,;1)$ et dirigée par $\vec{n}$ est $(1+2t\,;1-2t\,;1-t)$. En reportant :

$$2(1+2t)-2(1-2t)-(1-t)=9t-1=0 \iff t=\frac{1}{9}$$

$$\boxed{H\left(\frac{11}{9}\,;\frac{7}{9}\,;\frac{8}{9}\right)}$$

Vérification : $GH=|t|\times\|\vec{n}\|=\frac{1}{9}\times 3=\frac{1}{3}$, ce qui confirme la question 7.

9. $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DG}=2-0-1=1\neq 0$: la droite et le plan sont sécants. La droite (DG) a pour représentation paramétrique $(t\,;1\,;t)$, et en reportant :

$$2t-2-t=0 \iff t=2$$

$$\boxed{(DG) \text{ perce le plan } (AIJ) \text{ au point } (2\,;1\,;2).}$$

On remarque que ce point est situé *à l'extérieur* du cube : c'est la droite (DG) tout entière, et non le segment $[DG]$, qui rencontre le plan.

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

1. $B(0\,;1\,;4)$: $0+1-4+3=0$, donc $\boxed{B\in\mathcal{P}}$.
   $A(1\,;0\,;2)$: $2+0-2+3=3\neq 0$ et $C(2\,;1\,;2)$: $4+1-2+3=6\neq 0$.
2. $\|\vec{n}\|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$, donc

$$d(A,\mathcal{P})=\frac{3}{\sqrt{6}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}} \qquad \text{et} \qquad d(C,\mathcal{P})=\frac{6}{\sqrt{6}}=\boxed{\sqrt{6}}$$

3. Les deux quantités $2x+y-z+3$ valent respectivement 3 et 6 : elles sont de **même signe**.

$$\boxed{A \text{ et } C \text{ sont situés du même côté du plan.}}$$

4. La droite passant par A et dirigée par $\vec{n}$ est $(1+2t\,;t\,;2-t)$. En reportant :

$$2(1+2t)+t-(2-t)+3=6t+3=0 \iff t=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{H\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)}$$

Vérification : $AH=|t|\times\|\vec{n}\|=\frac{1}{2}\sqrt{6}$, conforme à la question 2.

5. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1+0=\boxed{0}$$

$$\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle en } A.}$$

Son aire vaut alors $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{12}}{2}=\boxed{\sqrt{3}}$.

6. (AC) : $(1+t\,;t\,;2)$. Comme $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2+1-0=3\neq 0$, la droite et le plan sont sécants :

$$2(1+t)+t-2+3=3t+3=0 \iff t=-1$$

$$\boxed{(AC) \text{ coupe } \mathcal{P} \text{ au point } (0\,;-1\,;2).}$$

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A

1. $A(1\,;1\,;0) : 1+2-0-3=0\,;\quad B(3\,;0\,;0) : 3+0-0-3=0\,;\quad C(2\,;3\,;5) : 2+6-5-3=0.$

$$\boxed{\text{Les trois points appartiennent à } \mathcal{P}.}$$

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (la troisième coordonnée est nulle pour l'un et pas pour l'autre) :

$$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$$

3. Trois points non alignés définissent un unique plan. Ces trois points appartenant à $\mathcal{P}$:

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est le plan } (ABC).}$$

4. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2-2+0=0\quad$ et $\quad\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=1+4-5=0.$
$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc à tout vecteur de ce plan :

$$\boxed{\vec{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC).}$$

Partie B

5. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2-2+0=\boxed{0}$, donc $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A.}$

6. $AB=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},\quad AC=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30},\quad BC=\left\|\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{35}.$
Or $AB^2+AC^2=5+30=35=BC^2$: la réciproque du théorème de Pythagore confirme que le triangle est rectangle en A.

7. $\text{Aire}=\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{30}}{2}=\dfrac{\sqrt{150}}{2}=\boxed{\dfrac{5\sqrt{6}}{2}}$

Partie C

8. $D(2\,;1\,;-1) : 2+2+1-3=2\neq 0$, donc $D\notin(ABC)$. De plus

$$d(D,(ABC))=\frac{|2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

9. La droite passant par D et dirigée par $\vec{n}$ est $(2+t\,;1+2t\,;-1-t)$. En reportant :

$$(2+t)+2(1+2t)-(-1-t)-3=6t+2=0\iff t=-\frac{1}{3}$$

$$\boxed{H\left(\frac{5}{3}\,;\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\right)}$$

Vérification : $DH=\frac{1}{3}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

10. En prenant ABC pour base et DH pour hauteur :

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{5\times 6}{6}=\boxed{\frac{5}{3}}$$

EXERCICE 29 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A

1. $\mathcal{D}$ passe par $A(2\,;1\,;3)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$; $\mathcal{D}'$ passe par $B(1\,;0\,;0)$ et est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

2. Le coefficient de proportionnalité serait 2 d'après les premières coordonnées, mais $2\times(-1)=-2\neq-1$:

   $\boxed{\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.}}$

3. Cherchons un point commun :

$$\begin{cases}2+t=1+2s\\1-t=-s\\3+2t=s\end{cases}$$

   La deuxième donne $t=1+s$. En reportant dans la première : $3+s=1+2s$, soit $s=2$ et $t=3$. On teste dans la troisième : $3+6=9$, alors qu'il faudrait obtenir $s=2$.

   $\boxed{\text{Le système n'a pas de solution : les droites ne sont pas sécantes.}}$

4. Elles ne sont ni parallèles ni sécantes :

   $\boxed{\mathcal{D}\text{ et }\mathcal{D}'\text{ sont non coplanaires.}}$

Partie B

5. On cherche $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases}a-b+2c=0\\2a-b+c=0\end{cases}$$

   En soustrayant la première de la seconde : $a-c=0$, donc $a=c$. La première donne alors $b=a+2c=3a$. En choisissant $a=1$:

$$\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}}$$

   Vérifications : $1-3+2=0$ et $2-3+1=0$.

6. L'équation est de la forme $x+3y+z+d=0$, et avec $A(2\,;1\,;3)$: $2+3+3+d=0$:

   $\boxed{\mathcal{Q}:x+3y+z-8=0}$

7. Un point quelconque de $\mathcal{D}$ s'écrit $(2+t\,;1-t\,;3+2t)$. En reportant :

$$(2+t)+3(1-t)+(3+2t)-8=2+t+3-3t+3+2t-8=0$$

   Le paramètre t disparaît et l'égalité est vraie pour tout t :

   $\boxed{\mathcal{D}\text{ est entièrement contenue dans }\mathcal{Q}.}$

8. $\vec{v}\cdot\vec{n} = 2-3+1 = 0$, donc $\mathcal{D}'$ est parallèle à $\mathcal{Q}$ ou contenue dedans. Or $B(1\,;0\,;0)$ donne $1+0+0-8=-7\neq 0$:

$$\boxed{\mathcal{D}' \text{ est strictement parallèle à } \mathcal{Q}.}$$

Partie C

9. $d(B,\mathcal{Q}) = \dfrac{|1+0+0-8|}{\sqrt{1+9+1}} = \dfrac{7}{\sqrt{11}} = \boxed{\dfrac{7\sqrt{11}}{11}}$

10. La droite passant par B et dirigée par $\vec{n}$ est $(1+t\,;3t\,;t)$. En reportant :

$$(1+t)+9t+t-8 = 11t-7 = 0 \iff t = \frac{7}{11}$$

$$\boxed{H\left(\frac{18}{11}\,;\frac{21}{11}\,;\frac{7}{11}\right)}$$

Vérification : $BH = \frac{7}{11}\times\sqrt{11} = \frac{7\sqrt{11}}{11}$.

11. La droite $\mathcal{D}'$ étant *parallèle* au plan $\mathcal{Q}$, tous ses points sont à la même distance de ce plan. En effet, si M et M' sont deux points de $\mathcal{D}'$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{v}$, donc orthogonal à $\vec{n}$: la quantité $x+3y+z-8$ prend la même valeur en M et en M'.

$$\boxed{\text{Cette distance commune vaut } \frac{7\sqrt{11}}{11}.}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. **Réponse A.** $\vec{v} = -2\,\vec{u}$: les vecteurs sont colinéaires. Leur produit scalaire vaut $-2-8-2 = -12\neq 0$, ils ne sont donc pas orthogonaux.
2. **Réponse A.** $1\times 2+0\times 3+2\times(-1) = 2-2 = 0$.
3. **Réponse A.** $\sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$.
4. **Réponse A.** Les coefficients de x, y et z dans l'équation donnent directement les coordonnées d'un vecteur normal.
5. **Réponse B.** $2\times 1-2+0 = 0$, donc $(1\,;2\,;0)$ appartient au plan. Les deux autres points donnent respectivement $2-1+1=2$ et $0-1+2=1$, tous deux non nuls.
6. **Réponse B.** On lit les coefficients du paramètre t : 2, -1 et 0.
7. **Réponse A.** $\dfrac{|0+0+0-9|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{9}{3} = 3$.
8. **Réponse C.** C'est la nouveauté de la géométrie de l'espace : deux droites non parallèles peuvent être sécantes, mais aussi non coplanaires.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. **Fausse**. *Contre-exemple :* $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ sont deux à deux non colinéaires, mais tous trois coplanaires. *Énoncé correct :* il faut que les trois vecteurs ne soient pas coplanaires.
2. **Fausse**. *Contre-exemple :* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ sont non nuls et de produit scalaire nul. Un produit scalaire nul traduit l'**orthogonalité**, pas la nullité.
3. **Vraie**. Deux plans sont soit confondus, soit strictement parallèles, soit sécants selon une droite. N'ayant aucun point commun, ils ne peuvent être ni confondus ni sécants.

4. **Fausse**. *Contre-exemple :* les droites (AB) et (CG) d'un cube n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles : elles sont non coplanaires.
5. **Vraie**. Si $\vec{n}$ est normal à un plan, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ l'est aussi : il y en a une infinité.
6. **Fausse**. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques, selon le point et le vecteur directeur choisis.
7. **Vraie**. Deux droites sécantes d'un plan fournissent deux vecteurs directeurs non colinéaires. Tout vecteur du plan étant combinaison linéaire de ces deux-là, une droite orthogonale aux deux est orthogonale à tous les vecteurs du plan : c'est la définition d'un vecteur normal.
8. **Fausse**. En élevant au carré, la condition s'écrit $\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$, soit $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$: le cosinus de l'angle vaut 1, les vecteurs sont donc **colinéaires et de même sens**, et non orthogonaux.

EXERCICE 32 : LES SPHÈRES ⋆⋆

Partie A

1. La distance entre $\Omega(1\,;2\,;-1)$ et $M(x\,;y\,;z)$ vaut $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$, donc :

$$\boxed{M \in \mathcal{S} \iff \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2} = 3}$$

2. Les deux membres étant positifs, l'élévation au carré est une équivalence :

$$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 9}$$

3. On développe chaque carré :

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+2z+1 = 9$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3 = 0}$$

4. Le même calcul avec un centre et un rayon quelconques donne :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2 = 0}$$

On retiendra que les coefficients de x, y et z valent -2 fois les coordonnées du centre.

Partie B

5. $(x-3)^2-9 = x^2-6x+9-9 = x^2-6x$: l'égalité est bien vérifiée.
   De même : $y^2+4y = (y+2)^2-4$ et $z^2-2z = (z-1)^2-1$.
6. En regroupant :

$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1+5 = 0 \iff (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 9$$

$$\boxed{\text{C'est la sphère de centre } (3\,;-2\,;1) \text{ et de rayon } 3.}$$

7. $x^2-4x = (x-2)^2-4$, $y^2+2y = (y+1)^2-1$ et $z^2-6z = (z-3)^2-9$, d'où :

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2-4-1-9+14 = 0 \iff (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 0$$

Une somme de trois carrés est nulle si et seulement si chacun l'est :

$$\boxed{\text{L'ensemble se réduit au seul point } (2\,;-1\,;3).}$$

8. $x^2-2x=(x-1)^2-1$ et $y^2+4y=(y+2)^2-4$, d'où :

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2-1-4+9=0 \iff (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=-4$$

Une somme de carrés ne peut être négative :

$$\boxed{\text{L'ensemble est vide.}}$$

9. Après mise sous forme canonique, on aboutit à $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$, et :

si $k>0$:	une sphère de centre $(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon $\sqrt{k}$;
si $k=0$:	un unique point ;
si $k<0$:	l'ensemble vide.

EXERCICE 33 : SPHÈRES ET PLANS ⋆⋆⋆

1. On met sous forme canonique :

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9+5=0 \iff (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$$

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est la sphère de centre } \Omega(1\,;-2\,;3) \text{ et de rayon } R=3.}$$

2. $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ donne $\Omega A=3=R$, donc $\boxed{A\in\mathcal{S}}$.

$\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ donne $\Omega B=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}\neq 3$, donc $\boxed{B\notin\mathcal{S}}$.

3. $d(\Omega,\mathcal{P})=\dfrac{|2+2+6-7|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{3}{3}=\boxed{1}$

4. Cette distance 1 est **strictement inférieure** au rayon 3 : le plan passe donc à l'intérieur de la sphère.

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ coupe } \mathcal{S} \text{ selon un cercle.}}$$

5. La droite passant par Ω et dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est $(1+2t\,;-2-t\,;3+2t)$. En reportant dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$2(1+2t)-(-2-t)+2(3+2t)-7=9t+3=0 \iff t=-\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\omega\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{5}{3}\,;\frac{7}{3}\right)}$$

6. Le point ω étant le projeté orthogonal de Ω, le vecteur $\overrightarrow{\Omega\omega}$ est normal au plan, tandis que $\overrightarrow{\omega M}$ appartient au plan : ces deux vecteurs sont orthogonaux, donc le triangle est rectangle en ω. Le théorème de Pythagore donne :

$$\Omega M^2=\Omega\omega^2+\omega M^2 \iff R^2=d^2+r^2 \iff 9=1+r^2$$

$$\boxed{r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}}$$

7. $d(\Omega, \mathcal{P}') = \dfrac{|2+2+6-19|}{3} = \dfrac{9}{3} = 3 = R.$
La distance est **exactement égale** au rayon :

$$\boxed{\mathcal{P}' \text{ est tangent à } \mathcal{S} \text{ : ils ont un unique point commun.}}$$

8. Ce point est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}'$:

$$2(1+2t) - (-2-t) + 2(3+2t) - 19 = 9t - 9 = 0 \iff t = 1$$

$$\boxed{\text{Le point de tangence est } (3\,;-3\,;5).}$$

Vérification : $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ a bien pour norme $3 = R$.

9. $d(\Omega, \mathcal{P}'') = \dfrac{|2+2+6-25|}{3} = \dfrac{15}{3} = 5 > 3 = R$:

$$\boxed{\mathcal{P}'' \text{ ne rencontre pas } \mathcal{S}.}$$

10. Le plan est tangent si et seulement si la distance du centre vaut exactement R :

$$\frac{|2\times 1 - (-2) + 2\times 3 + k|}{3} = 3 \iff |10+k| = 9 \iff 10+k = 9 \text{ ou } 10+k = -9$$

$$\boxed{k = -1 \quad \text{ou} \quad k = -19}$$

Interprétation : ces deux plans sont parallèles et situés de part et d'autre de la sphère, qu'ils touchent chacun en un point ; ils sont distants de $2R = 6$.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ sont respectivement colinéaires à $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, qui forment une base de l'espace : ils ne sont donc pas coplanaires.

$$\boxed{O,\ A,\ B \text{ et } C \text{ forment un tétraèdre.}}$$

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$, d'où

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -6+6+0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -6+0+6 = 0$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : c'est un vecteur normal. L'équation est de la forme $6x+3y+2z+d=0$, et avec $A(1\,;0\,;0)$: $6+d=0$.

$$\boxed{(ABC) : 6x+3y+2z-6=0}$$

3. $\|\vec{n}\| = \sqrt{36+9+4} = 7$, donc $d(O,(ABC)) = \dfrac{|-6|}{7} = \boxed{\dfrac{6}{7}}$

4. La droite passant par O et dirigée par $\vec{n}$ est $(6t\,;3t\,;2t)$. En reportant :

$$36t+9t+4t-6=49t-6=0 \iff t=\frac{6}{49}$$

$$\boxed{H\left(\frac{36}{49}\,;\frac{18}{49}\,;\frac{12}{49}\right)}$$

Vérification : $OH=\frac{6}{49}\times 7=\frac{6}{7}$.

5. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1+0+0=1\neq 0$; on vérifie de même que les deux autres produits scalaires (4 en B et 9 en C) sont non nuls.

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ n'est pas rectangle.}}$$

6. $AB=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ et $AC=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$, donc

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{50}}}$$

Comme un angle de triangle est compris entre 0 et 180°, son sinus est positif :

$$\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{50}}=\sqrt{\frac{49}{50}}=\boxed{\frac{7}{\sqrt{50}}}$$

L'aire du triangle vaut alors :

$$\text{Aire}=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{1}{2}\times\sqrt{50}\times\frac{7}{\sqrt{50}}=\boxed{\frac{7}{2}}$$

7. Le triangle OAB est rectangle en O, d'aire $\dfrac{1\times 2}{2}=1$. La hauteur correspondante est $[OC]$, de longueur 3, car (OC) est orthogonale au plan (OAB) :

$$V=\frac{1}{3}\times 1\times 3=\boxed{1}$$

8. Avec ABC pour base et OH pour hauteur :

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{6}{7}=\frac{1}{3}\times 3=\boxed{1}$$

$$\boxed{\text{Les deux calculs concordent.}}$$

C'est une vérification particulièrement satisfaisante : elle relie l'aire du triangle ABC, obtenue par le produit scalaire, à la distance du point O au plan (ABC), obtenue par la formule du cours. Deux outils très différents du chapitre y donnent le même nombre.

Pour aller plus loin

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Par les propriétés du produit scalaire (distributivité et symétrie), pour tout réel x :

$$f(x) = (x\vec{u} + \vec{v}) \cdot (x\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 x^2 + 2\,(\vec{u} \cdot \vec{v})\, x + \|\vec{v}\|^2$$

Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, le coefficient $\|\vec{u}\|^2$ est strictement positif : f est un trinôme du second degré. Or f est à valeurs positives, puisque c'est le carré d'une norme. Un trinôme de coefficient dominant positif qui aurait deux racines distinctes serait strictement négatif entre ses racines ; le discriminant de f est donc négatif ou nul :

$$\Delta = 4\,(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \leqslant 0 \iff (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient, puisque $\sqrt{X^2} = |X|$:

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

Cas d'égalité. Comme on sait déjà que $\Delta \leqslant 0$, il y a égalité si et seulement si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si et seulement si f s'annule en un réel x_0. Or $f(x_0) = 0$ signifie $\|x_0\vec{u} + \vec{v}\| = 0$, c'est-à-dire $\vec{v} = -x_0\vec{u}$. Réciproquement, si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, alors $f(-\lambda) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Remarque. Deux vecteurs de l'espace étant toujours coplanaires, cette inégalité se lit aussi sur l'expression $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$: elle dit simplement que $|\cos\theta| \leqslant 1$. L'intérêt de la démonstration par le trinôme est ailleurs : elle n'utilise que la distributivité et la positivité de $\vec{w} \cdot \vec{w}$, et elle s'applique donc mot pour mot à des sommes de n termes, ce qui est la forme générale du théorème de Cauchy-Schwarz qu'on rencontre en classe préparatoire.

2. On applique la question 1 aux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, de normes respectives $\sqrt{3}$ et 1 :

$$x + y + z \leqslant |x + y + z| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$$

Il y a égalité si et seulement si les deux inégalités sont des égalités : $\vec{v}$ doit être colinéaire à $\vec{u}$, donc $x = y = z = \lambda$ avec $3\lambda^2 = 1$, et de plus $x + y + z = 3\lambda$ doit être positif, ce qui impose $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\boxed{x + y + z = \sqrt{3} \iff x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Interprétation : les points $(x\,;y\,;z)$ considérés forment la sphère de centre O et de rayon 1 (exercice 32), et le résultat dit que le plan d'équation $x + y + z = \sqrt{3}$ touche cette sphère en un seul point : il lui est tangent, comme on le vérifierait avec la méthode de l'exercice 33, puisque sa distance à O vaut $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$.

3. Notons $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, vecteur normal à $\mathcal{P}$, et soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de $\mathcal{P}$. Comme $ax+by+cz+d = 0$, on peut faire disparaître d :

$$ax_A + by_A + cz_A + d = a(x_A - x) + b(y_A - y) + c(z_A - z) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{MA}$$

L'inégalité de la question 1 donne alors $|ax_A + by_A + cz_A + d| = \left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MA}\right| \leqslant \|\vec{n}\| \times AM$, c'est-à-dire, puisque $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0$:

$$\boxed{AM \geqslant \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

D'après le cas d'égalité, cette borne est atteinte exactement lorsque $\overrightarrow{MA}$ est colinéaire à $\vec{n}$, c'est-à-dire lorsque M appartient à la droite passant par A et dirigée par $\vec{n}$. Cette droite a pour représentation paramétrique $(x_A + ta\,;y_A + tb\,;z_A + tc)$, et elle coupe $\mathcal{P}$ pour une unique valeur de t, puisque la condition d'appartenance s'écrit $(a^2+b^2+c^2)\,t = -(ax_A + by_A + cz_A + d)$.

La borne est atteinte en un unique point : le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.

Ce que l'on a démontré : on retrouve la formule du cours donnant la distance d'un point à un plan, mais avec une information supplémentaire. Cette distance est la *plus petite* des distances AM lorsque M parcourt le plan, et le projeté orthogonal est le seul point qui la réalise. Avec le tétraèdre de l'exercice 34, on retrouve ainsi que 6/7 est la plus courte distance de O à un point du plan (ABC).

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

1. On applique l'identité du parallélogramme $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$ aux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$, et par la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Il vient $4AI^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$, d'où le *théorème de la médiane* :

$$\boxed{AI^2 = \frac{AB^2 + CA^2}{2} - \frac{BC^2}{4}}$$

Vérification : avec le triangle $A(0\,;0\,;0)$, $B(2\,;1\,;2)$, $C(1\,;2\,;-2)$ de l'exercice 8, on a $AB^2 = AC^2 = 9$ et $BC^2 = 18$, donc $AI^2 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$. Le calcul direct avec $I\left(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\,;0\right)$ donne bien $\frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$. Ce triangle étant rectangle en A, on retrouve au passage que la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse : $AI = \frac{BC}{2}$.

2. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$, donc :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

Le point G existe donc, il est unique, et il appartient à la médiane (AI), aux deux tiers en partant de A. La relation qui définit G ne change pas lorsqu'on permute les lettres A, B et C : le même calcul, mené à partir de B puis de C, montre que G appartient aussi aux deux autres médianes.

Les trois médianes sont concourantes en G.

3. On définit cette fois G par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Le même calcul qu'à la question 2 donne

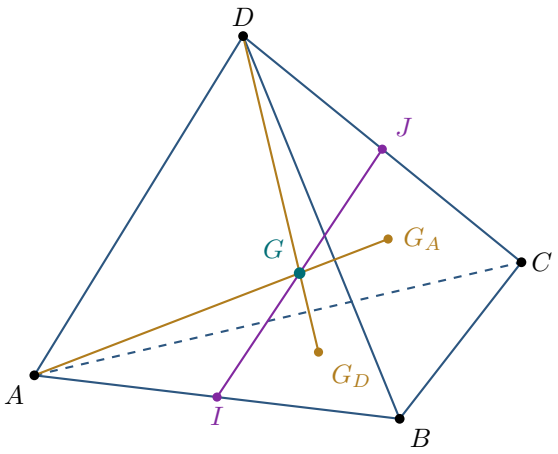
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$$

ce qui prouve que G existe et est unique. Notons G_A le centre de gravité de la face BCD ; la question 2, appliquée au triangle BCD, donne $3\overrightarrow{G_AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ après décomposition par Chasles, donc $\overrightarrow{AG_A} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. En comparant :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$$

Le point G est donc sur la médiane (AG_A), aux trois quarts en partant de A, et par symétrie des rôles sur les trois autres médianes.
Pour les bimédianes, notons I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$. Comme $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}$, la relation qui définit G devient $2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$: G est le milieu de $[IJ]$. Il en va de même pour les deux autres couples d'arêtes opposées.

Médianes et bimédianes passent par G, défini par $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.



Sur cette figure, on lit que deux médianes (en ocre) et une bimédiane (en violet) se coupent en G, qui est le milieu de $[IJ]$ et se trouve aux trois quarts de chaque médiane en partant du sommet.
Remarque. Le coefficient $\frac{2}{3}$ du triangle devient $\frac{3}{4}$ pour le tétraèdre : dans les deux cas, G est l'*isobarycentre* des sommets, et l'on devine la règle générale pour n points. L'erreur la plus répandue est de croire que G est aux deux tiers des médianes du tétraèdre, par analogie hâtive avec le triangle.

4. Prenons G pour origine et notons $\vec{a}=\overrightarrow{GA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{GB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{GC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{GD}$, de sorte que $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$, et posons $S=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2+\|\vec{d}\|^2$.
Bimédianes. Avec les notations de la question 3, $\overrightarrow{GI}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ et $\overrightarrow{GJ}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, donc $IJ=\|\overrightarrow{GJ}-\overrightarrow{GI}\|=\|\vec{a}+\vec{b}\|$. De même, les deux autres bimédianes ont pour longueurs $\|\vec{a}+\vec{c}\|$ et $\|\vec{a}+\vec{d}\|$. En développant, et en utilisant $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=-\vec{a}$:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2+\|\vec{a}+\vec{c}\|^2+\|\vec{a}+\vec{d}\|^2=3\|\vec{a}\|^2+\left(S-\|\vec{a}\|^2\right)+2\,\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)=S$$

Arêtes. Notons P la somme des six produits scalaires $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, …, $\vec{c}\cdot\vec{d}$. D'une part $0=\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\|^2=S+2P$, donc $2P=-S$. D'autre part, chaque vecteur apparaît dans trois arêtes, si bien que

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=\|\vec{a}-\vec{b}\|^2+\cdots+\|\vec{c}-\vec{d}\|^2=3S-2P=4S$$

En comparant les deux résultats :

$$IJ^2+I'J'^2+I''J''^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2\right)$$

où $[I'J']$ et $[I''J'']$ désignent les deux autres bimédianes.
Vérification : dans un tétraèdre régulier d'arête 1, chaque bimédiane mesure $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (on peut l'inscrire dans un cube d'arête $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ses arêtes étant alors des diagonales de faces, et chaque bimédiane

joint alors les centres de deux faces opposées du cube). La somme des carrés des bimédianes vaut $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, et le quart de la somme des carrés des arêtes vaut $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Remarque. Le choix de l'origine en G est ce qui rend le calcul court : la relation $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ permet de remplacer toute somme de trois vecteurs par l'opposé du quatrième. C'est un réflexe à acquérir, déjà présent dans la question 2.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆⋆

1. Tout point M de Δ s'écrit de manière unique sous la forme $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec t réel : c'est la représentation paramétrique de Δ de paramètre t. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+t\vec{u}$, et M appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $OM^2 = R^2$, c'est-à-dire si et seulement si $\left\|\overrightarrow{OA} + t\vec{u}\right\|^2 = R^2$. En développant comme à l'exercice 35, et puisque $\|\vec{u}\| = 1$:

$$\boxed{t^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}\right)t + \left(OA^2 - R^2\right) = 0}$$

C'est bien une équation du second degré en t, de coefficients 1, $2\,\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}$ et $OA^2 - R^2$. Les points M_1 et M_2 correspondent à ses deux racines t_1 et t_2, confondues lorsque $M_1 = M_2$.

2. On a $\overrightarrow{AM_1} = t_1\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM_2} = t_2\vec{u}$, donc $\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{AM_2} = t_1t_2\|\vec{u}\|^2 = t_1t_2$. Le produit des racines d'un trinôme ax^2+bx+c valant $\frac{c}{a}$, y compris dans le cas d'une racine double :

$$\boxed{\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{AM_2} = OA^2 - R^2}$$

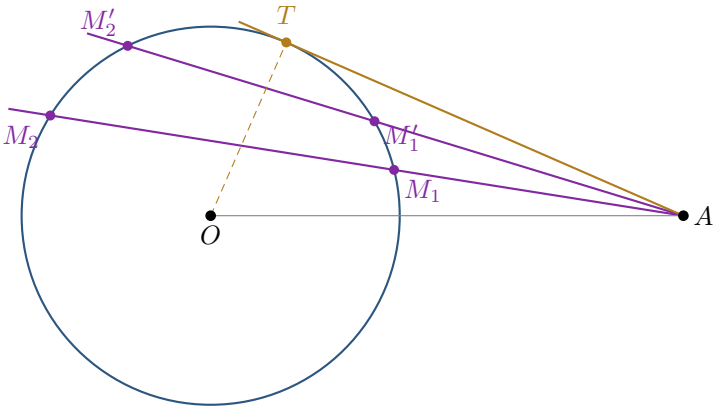
Cette quantité ne dépend que de A et de la sphère, et non de la droite Δ : on l'appelle la *puissance* du point A par rapport à $\mathcal{S}$.

3. Le signe est celui de $OA^2 - R^2$, c'est-à-dire celui de $OA - R$.
   - Si A est *extérieur* à la sphère ($OA > R$), le produit scalaire est strictement positif : t_1 et t_2 sont de même signe, les points M_1 et M_2 sont du même côté de A sur Δ, et l'on a $AM_1 \times AM_2 = OA^2 - R^2$.
   - Si A est *intérieur* à la sphère ($OA < R$), il est strictement négatif : A est situé entre M_1 et M_2, et $AM_1 \times AM_2 = R^2 - OA^2$. Comme $t_1t_2 < 0$, le trinôme a toujours deux racines distinctes : toute droite passant par un point intérieur coupe la sphère en deux points.
   - Si A est sur la sphère, il est nul, puisque A est alors l'un des deux points.

   Lorsque Δ est tangente à $\mathcal{S}$, ce qui suppose A extérieur ou sur la sphère, $M_1 = M_2 = T$ et la puissance vaut AT^2 :

$$\boxed{AT^2 = OA^2 - R^2}$$

C'est le théorème de Pythagore dans le triangle OTA, rectangle en T : on retrouve que la tangente est orthogonale au rayon, comme à la question 6 de l'exercice 33.



Cette coupe par un plan passant par O et contenant les droites tracées montre deux sécantes (en violet) et la tangente (en ocre) issues du même point extérieur A : les produits $AM_1 \times AM_2$, $AM_1' \times AM_2'$ et AT^2 y sont égaux, ici à $5^2 - 2^2 = 21$.
Remarque. La puissance se lit directement sur l'équation développée de la sphère. Pour la sphère de l'exercice 33, d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$, le membre de gauche n'est autre que $\Omega M^2 - R^2$; en $M = O(0\,;0\,;0)$, il vaut 5, qui est donc la puissance de l'origine. On le vérifie avec l'axe (Oz) : les points $(0\,;0\,;t)$ de la sphère vérifient $t^2 - 6t + 5 = 0$, soit $t = 1$ ou $t = 5$, et l'on a bien $1 \times 5 = 5 = \Omega O^2 - R^2 = 14 - 9$.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆⋆

Dans tout l'exercice, la clé est la même : les sommets sont à la même distance R de O, et pour deux tels sommets P et Q, $\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = OQ^2 - OP^2 = 0$.

1. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, donc :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = OC^2 - OB^2 = R^2 - R^2 = 0$$

Par ailleurs, O appartient au plan (ABC), et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ est une combinaison de vecteurs de ce plan : H appartient donc au plan (ABC). Ainsi, ou bien $H = A$, ou bien (AH) est la droite du plan (ABC) passant par A et orthogonale à (BC) ; dans les deux cas, H appartient à la hauteur issue de A. La définition de H étant symétrique en A, B et C, le même calcul vaut pour les deux autres hauteurs.

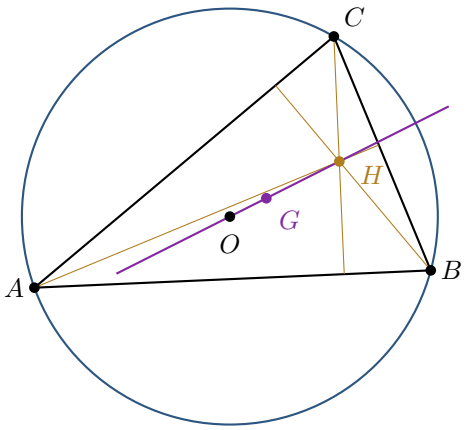
$$\boxed{H \text{ appartient aux trois hauteurs : c'est l'orthocentre du triangle } ABC.}$$

Remarque. Ce calcul démontre au passage que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, résultat admis au collège.

2. D'après l'exercice 36, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. En écrivant $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}$, et de même pour B et C, on obtient $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

$$\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires : les points O, G et H sont alignés. Lorsqu'ils sont distincts, la droite qui les porte s'appelle la *droite d'Euler* du triangle. Ils sont confondus si et seulement si $O = G$, auquel cas chaque médiane, passant par O et par le milieu du côté opposé, est la médiatrice de ce côté ; le triangle est alors équilatéral.



On lit sur cette figure que les trois hauteurs (en ocre) concourent en H, et que O, G et H sont alignés sur la droite d'Euler (en violet), avec $OH = 3\,OG$.

3. Soit I le milieu de l'arête $[AB]$, dont l'arête opposée est $[CD]$. Le plan passant par I et orthogonal à (CD) est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{CD}$ passant par I : un point P lui appartient si et seulement si $\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Or $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, donc $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$, et

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(OD^2 - OC^2\right) = 0$$

puisque C et D sont sur la sphère de centre O. Le point M appartient donc à ce plan, et, la définition de M étant symétrique en A, B, C et D, le même calcul vaut pour les six arêtes.

$$\boxed{\text{Les six plans passent par } M.}$$

Enfin, comme à la question 2, la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ de l'exercice 36 donne $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$, d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OG} : G \text{ est le milieu de } [OM].}$$

Le point M s'appelle le *point de Monge* du tétraèdre, et la droite qui porte O, G et M joue le rôle de la droite d'Euler.

Remarque. Le piège serait de chercher un « orthocentre » du tétraèdre : contrairement à celles d'un triangle, les quatre hauteurs d'un tétraèdre ne sont en général pas concourantes. Ce sont les six plans de l'énoncé, et non les hauteurs, qui fournissent un point de concours dans l'espace ; c'est pourquoi la relation $\overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OG}$ n'est pas l'exact analogue de la relation d'Euler $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$.