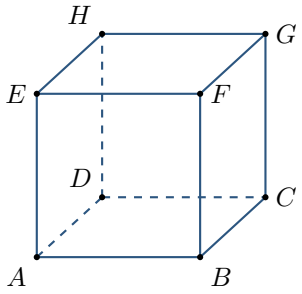
EXERCICES – CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Repères, bases et coordonnées

EXERCICE 1 ⋆

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Justifier que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est bien une base de l'espace, et que le repère est orthonormé.
2. Donner les coordonnées des huit sommets du cube dans ce repère.
3. Donner les coordonnées :
   a) du centre I de la face $EFGH$;
   b) du centre Ω du cube ;
   c) du milieu J de $[BC]$;
   d) du milieu K de $[CG]$.
4. Donner les coordonnées du point L tel que $\overrightarrow{AL}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

EXERCICE 2 ⋆

On reprend le cube de l'exercice 1 et la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. Décomposer sur cette base chacun des vecteurs suivants, en détaillant l'utilisation de la relation de Chasles.

a) $\overrightarrow{AG}$ b) $\overrightarrow{BH}$ c) $\overrightarrow{CE}$ d) $\overrightarrow{DF}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{BD}$ g) $\overrightarrow{EC}$ h) $\overrightarrow{FH}$ i) $\overrightarrow{AI}$ (I centre de $EFGH$)

EXERCICE 3 ⋆

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne les points

$$A(1\,;-2\,;3)\qquad B(4\,;0\,;-1)\qquad C(-2\,;5\,;2)\qquad D(0\,;1\,;1)$$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$ et $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer les coordonnées du milieu M de $[AB]$, puis celles du milieu N de $[CD]$.
4. Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.

5. Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\\-9\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}$

2. Les points $A(1\,;2\,;3)$, $B(3\,;5\,;1)$ et $C(7\,;11\,;-3)$ sont-ils alignés ?
3. Même question avec $A(0\,;1\,;2)$, $B(2\,;3\,;1)$ et $C(-2\,;-1\,;4)$.
4. Déterminer le réel m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix}$ soient colinéaires.
5. On donne les points suivants :

   $$A(1\,;0\,;1) \qquad B(3\,;2\,;-1) \qquad C(0\,;0\,;0) \qquad D(-1\,;-1\,;1)$$

   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Sont-elles confondues ?

EXERCICE 5 ⋆⋆

On appliquera la méthode du cours : vérifier d'abord que deux d'entre eux, par exemple $\vec{v}$ et $\vec{w}$, ne sont pas colinéaires ***entre eux****; écrire ensuite $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$ coordonnée par coordonnée ; résoudre le système à l'aide de deux équations, puis tester le couple obtenu dans la troisième.*

1. Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

   (b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

   (c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$

2. Les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$, $C(0\,;0\,;1)$ et $D(1\,;1\,;-1)$ sont-ils coplanaires ?
3. Même question avec $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$, $C(0\,;0\,;1)$ et $D(1\,;1\,;1)$.
4. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ? *On observera d'abord $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

PRODUIT SCALAIRE, NORMES ET DISTANCES

EXERCICE 6 ⋆

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{w}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{v}\cdot\vec{w}$.
2. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$.
3. Parmi ces trois vecteurs, quels sont ceux qui sont orthogonaux ?
4. Calculer $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ de deux façons différentes.
5. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, d'abord en déterminant les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, puis à l'aide de l'identité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

EXERCICE 7 ⋆

1. Dans chaque cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

2. Déterminer le réel m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.
3. Déterminer le réel m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\m\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.
4. Déterminer un vecteur non nul orthogonal à la fois à $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et à $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. *On cherchera* $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *en écrivant les deux conditions d'orthogonalité.*

EXERCICE 8 ⋆⋆

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. On donne $A(0\,;0\,;0)$, $B(2\,;1\,;2)$ et $C(1\,;2\,;-2)$. Calculer AB, AC et BC, puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. En déduire la nature précise du triangle ABC.
2. On donne $A(1\,;2\,;-1)$, $B(3\,;0\,;1)$ et $C(0\,;1\,;2)$. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Pour le triangle de la question 2, calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ACB}$.
4. On donne $A(1\,;1\,;0)$, $B(2\,;-1\,;3)$, $C(4\,;0\,;1)$ et $D(3\,;2\,;-2)$. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme, puis préciser s'il s'agit d'un losange.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Dans cet exercice, aucune coordonnée n'est donnée : on utilisera uniquement les identités liées à la norme.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5$. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$.
2. Vérifier sur cet exemple l'identité du parallélogramme.
3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=5$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=6$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, puis $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.
4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même norme. Démontrer que $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux. Quelle propriété du parallélogramme retrouve-t-on ainsi ?

EXERCICE 10 ⋆⋆

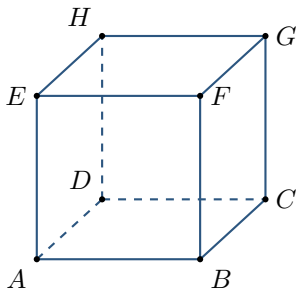
On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer les longueurs BD, DE et BE. Quelle est la nature du triangle BDE ?
3. Calculer $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}$. Que peut-on en déduire sur la droite (AG) et le plan (BDE) ?
4. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle entre $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$.
5. Le triangle AFH est-il équilatéral ? Justifier par le calcul.

Représentation dans l'espace

EXERCICE 11 ⋆

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Pour chacun des couples de droites suivants, dire si les deux droites sont **coplanaires** ou non. Lorsqu'elles le sont, préciser si elles sont parallèles ou sécantes, et donner dans ce dernier cas leur point d'intersection.



a) (AB) et (GH)
b) (AB) et (CG)
c) (AF) et (DG)
d) (AC) et (EG)
e) (AH) et (BG)
f) (AG) et (BH)
g) (BE) et (CH)
h) (AE) et (CD)

On pourra s'appuyer sur les coordonnées de l'exercice 1 pour justifier chaque réponse : la figure seule ne suffit pas à conclure.

EXERCICE 12 ⋆

Cet exercice est entièrement graphique. On représentera un plan par un parallélogramme, et l'on fera systématiquement apparaître en pointillés les parties cachées.

1. Reproduire en perspective cavalière un cube $ABCDEFGH$. Y tracer en couleur la diagonale (AG), puis le triangle BDE.
2. Dessiner un plan $\mathcal{P}$, puis, sur la même figure et de trois couleurs différentes :
   (a) une droite d_1 sécante à $\mathcal{P}$ en un point I ;
   (b) une droite d_2 strictement parallèle à $\mathcal{P}$;
   (c) une droite d_3 contenue dans $\mathcal{P}$.
3. Dessiner deux plans sécants, ainsi que leur droite d'intersection.
4. Dessiner deux plans strictement parallèles.

5. Dessiner deux droites non coplanaires. Expliquer en une phrase pourquoi un dessin ne permet jamais, à lui seul, de garantir que deux droites sont non coplanaires.
6. Sur le cube de la question 1, le plan (BDE) coupe le solide selon un triangle. Le tracer en le hachurant.

EXERCICE 13 ⋆⋆

$ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $AB = 4$, $AD = 3$ et $AE = 2$ (en centimètres). Les sommets sont disposés comme sur le cube des exercices précédents.

1. Représenter ce pavé droit en perspective cavalière.
2. Justifier que $\left(A\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace, puis donner les coordonnées des huit sommets dans ce repère.
3. Calculer la longueur de la diagonale $[AG]$.
4. Les droites (AG) et (BH) sont-elles coplanaires ? Si oui, déterminer leur point d'intersection.
5. Les droites (AB) et (CG) sont-elles coplanaires ? Justifier par le calcul, puis expliquer ce que la figure pouvait laisser croire.
6. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{GAB}$.

Équations de plans et représentations paramétriques

EXERCICE 14 ⋆

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du plan décrit.

1. Le plan passant par $A(1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.
2. Le plan passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
3. Le plan passant par $A(3\,;-2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.
4. Le plan passant par $A(1\,;1\,;1)$ et parallèle au plan d'équation $2x+3y-z+5=0$.
5. Le plan passant par $A(0\,;2\,;-3)$ et perpendiculaire à la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 15 ⋆

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x-2y+z-6=0$.

1. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. Les points $A(1\,;0\,;3)$, $B(2\,;1\,;1)$ et $C(0\,;-3\,;0)$ appartiennent-ils à $\mathcal{P}$?
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les trois axes du repère.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $B(2\,;1\,;1)$.
5. Les plans d'équations $3x-2y+z-6=0$ et $-6x+4y-2z+1=0$ sont-ils parallèles ? Confondus ?

EXERCICE 16 ⋆

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $A(2\,;1\,;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $A(0\,;0\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB), avec $A(1\,;2\,;0)$ et $B(4\,;0\,;5)$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD), avec $C(-1\,;3\,;2)$ et $D(1\,;3\,;-2)$. Que remarque-t-on ?
5. Les points $M(5\,;-5\,;9)$ et $N(4\,;-3\,;1)$ appartiennent-ils à la droite de la question 1 ?

EXERCICE 17 ⋆⋆

Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan défini par trois points, on cherche un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *orthogonal à deux vecteurs du plan : cela donne un système de deux équations, dont on choisit une solution non nulle.*

1. On donne $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$.
   (a) Justifier que ces trois points définissent bien un plan.
   (b) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC).
   (d) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC), et vérifier qu'elle est satisfaite par les trois points.
2. Déterminer de la même manière une équation cartésienne du plan (ABC) avec $A(1\,;1\,;0)$, $B(2\,;0\,;1)$ et $C(0\,;1\,;2)$.
3. Le point $D(3\,;-1\,;1)$ appartient-il à ce dernier plan ?

EXERCICE 18 ⋆⋆

On considère les points $A(1\,;-1\,;2)$, $B(3\,;0\,;1)$ et $C(-1\,;-2\,;3)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Le point C appartient-il à la droite (AB) ? Que peut-on en déduire pour les trois points ?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par $D(2\,;1\,;0)$ et parallèle à (AB).
4. Les droites (AB) et Δ sont-elles confondues ?
5. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par D et orthogonal à la droite (AB).

Positions relatives

EXERCICE 19 ⋆

Dans chaque cas, déterminer la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$. Lorsqu'ils sont sécants, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

1. $\mathcal{P} : x + 2y - z + 1 = 0$ et $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3t \end{cases}$
2. $\mathcal{P} : x - y + 2z - 3 = 0$ et $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}$
3. $\mathcal{P} : 3x + y - z + 2 = 0$ et $\mathcal{D} : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Dans chaque cas, déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

1. $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : -4x + 2y - 6z + 5 = 0$
2. $\mathcal{P} : x + y - z + 2 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2x - y + z - 3 = 0$
3. $\mathcal{P} : x - 2y + z - 4 = 0$ et $\mathcal{P}' : -3x + 6y - 3z + 12 = 0$
4. $\mathcal{P} : x + z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : y - 2 = 0$

EXERCICE 21 ⋆⋆

On considère les quatre droites suivantes :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 + s \end{cases} \qquad \mathcal{D}_3 : \begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = s \end{cases} \qquad \mathcal{D}_4 : \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = -2s \\ z = 4 + 2s \end{cases}$$

1. Donner un vecteur directeur et un point de chacune de ces quatre droites.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
3. Déterminer la position relative de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.
4. Déterminer la position relative de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_4$.
5. Résumer dans un tableau les trois positions relatives rencontrées.

EXERCICE 22 ⋆⋆

On considère les plans $\mathcal{P} : x + y + z - 3 = 0$ et $\mathcal{P}' : x - y + 2z - 1 = 0$.

1. Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.
2. Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à leur intersection si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations. On pose $z = t$. Exprimer alors x et y en fonction de t.
3. En déduire une représentation paramétrique de la droite $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, ainsi qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ.

4. Vérifier que $\vec{u}$ est orthogonal aux deux vecteurs normaux. Pourquoi était-ce prévisible ?
5. Le point $K(-1\,;2\,;2)$ appartient-il à Δ ?

Projeté orthogonal et distance à un plan

EXERCICE 23 ⋆

Dans chaque cas, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur le plan $\mathcal{P}$, puis la distance MH. *On appliquera la méthode en quatre étapes du cours, et l'on calculera la distance à l'aide de la relation* $\overrightarrow{MH} = t\,\vec{n}$.

1. $M(1\,;2\,;3)$ et $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 5 = 0$
2. $M(0\,;0\,;0)$ et $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 6 = 0$
3. $M(2\,;-1\,;4)$ et $\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$

EXERCICE 24 ⋆

1. À l'aide de la formule directe du cours, calculer la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $M(1\,;1\,;1)$ et $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 3 = 0$. Que peut-on en conclure ?
   (b) $M(0\,;0\,;0)$ et $\mathcal{P} : 3x - 4z + 10 = 0$
   (c) $M(2\,;3\,;-1)$ et $\mathcal{P} : x + 2y - 2z + 1 = 0$
2. Vérifier les résultats de l'exercice 23 à l'aide de cette formule.
3. Déterminer les coordonnées des points de l'axe (Oz) situés à une distance 2 du plan d'équation $x + 2y + 2z - 1 = 0$.
4. Expliquer pourquoi la formule directe ne permet pas de répondre à la question de l'exercice 23, où l'on demandait les coordonnées de H.

EXERCICE 25 ⋆⋆

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. En utilisant le résultat de l'exercice 10, justifier que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BDE), puis déterminer une équation cartésienne de ce plan.
2. Calculer la distance du point A au plan (BDE).
3. Calculer la distance du point G au plan (BDE).
4. Vérifier que la somme des deux distances précédentes est égale à AG. Interpréter ce résultat.
5. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal K de A sur le plan (BDE).
6. Montrer que K est également le projeté orthogonal de G sur ce plan. Que peut-on en déduire pour les points A, K et G ?
7. Vérifier que K est le centre de gravité du triangle BDE.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. On note I le milieu de $[EF]$ et J le milieu de $[FG]$.

Partie A : longueurs et angles

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.
3. Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$, puis une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{IAJ}$.

Partie B : le plan (AIJ)

4. Justifier que les points A, I et J définissent bien un plan.
5. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (AIJ).
6. En déduire une équation cartésienne du plan (AIJ), et vérifier qu'elle est satisfaite par les trois points.

Partie C : distance et intersection

7. Calculer la distance du point G au plan (AIJ).
8. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de G sur ce plan.
9. Déterminer la position relative de la droite (DG) et du plan (AIJ). Si elles sont sécantes, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points

$$A(1\,;0\,;2)\qquad B(0\,;1\,;4)\qquad C(2\,;1\,;2)$$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x+y-z+3=0$.

1. Vérifier que B appartient à $\mathcal{P}$, et que A et C ne lui appartiennent pas.
2. Calculer la distance du point A à $\mathcal{P}$, puis celle du point C.
3. Les points A et C sont-ils situés d'un même côté du plan $\mathcal{P}$? Justifier à l'aide du signe de $2x+y-z+3$.
4. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$, puis vérifier la distance obtenue à la question 2.
5. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. En déduire la nature du triangle ABC, puis son aire.
6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AC), puis étudier sa position relative avec $\mathcal{P}$. Déterminer le cas échéant leur point d'intersection.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points

$$A(1\,;1\,;0) \qquad B(3\,;0\,;0) \qquad C(2\,;3\,;5) \qquad D(2\,;1\,;-1)$$

ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+2y-z-3=0$.

Partie A : le plan (ABC)

1. Vérifier que les points A, B et C appartiennent à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et justifier que A, B et C ne sont pas alignés.
3. En déduire que $\mathcal{P}$ est le plan (ABC).
4. Démontrer, par le calcul, que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est bien un vecteur normal au plan (ABC).

Partie B : le triangle ABC

5. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
6. Calculer les longueurs AB, AC et BC, et vérifier le résultat précédent à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore.
7. En déduire l'aire du triangle ABC.

Partie C : le tétraèdre $ABCD$

8. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (ABC), puis calculer la distance de D à ce plan.
9. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC), et retrouver la distance de la question précédente.
10. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
    On rappelle que le volume d'une pyramide vaut $\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$, *où* $\mathcal{B}$ *désigne l'aire de la base et* h *la hauteur correspondante.*

EXERCICE 29 - TYPE BAC ⋆⋆

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de représentations paramétriques respectives :

$$\mathcal{D}:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3+2t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R} \qquad\qquad \mathcal{D}':\begin{cases}x=1+2s\\y=-s\\z=s\end{cases}\quad s\in\mathbb{R}$$

Partie A : position relative des deux droites

1. Donner un point et un vecteur directeur de chacune de ces deux droites.
2. Démontrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.
3. Démontrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas sécantes.
4. Conclure quant à leur position relative.

Partie B : un plan contenant $\mathcal{D}$

5. Déterminer un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul, orthogonal à la fois aux deux vecteurs directeurs trouvés à la question 1.

6. Soit $\mathcal{Q}$ le plan passant par le point $A(2\,;1\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{Q}$.
7. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est entièrement contenue dans $\mathcal{Q}$.
8. Démontrer que la droite $\mathcal{D}'$ est strictement parallèle à $\mathcal{Q}$.

Partie C : une distance

9. Calculer la distance du point $B(1\,;0\,;0)$ au plan $\mathcal{Q}$.
10. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur $\mathcal{Q}$, et retrouver la distance précédente.
11. Expliquer pourquoi cette distance est la même pour *tout* point de la droite $\mathcal{D}'$.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}$ sont	colinéaires	orthogonaux	ni l'un ni l'autre
2. Le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ vaut	0	4	5
3. La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$ vaut	7	11	$\sqrt{11}$
4. Un vecteur normal au plan d'équation $x-3y+2z-1=0$ est	$\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$
5. Le plan d'équation $2x-y+z=0$ passe par le point	$(1\,;1\,;1)$	$(1\,;2\,;0)$	$(0\,;1\,;2)$
6. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=3\end{cases}$ a pour vecteur directeur	$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$
7. La distance de l'origine au plan d'équation $x+2y+2z-9=0$ vaut	3	9	1
8. Deux droites de l'espace qui ne sont pas parallèles sont	nécessairement sécantes	nécessairement non coplanaires	sécantes ou non coplanaires

EXERCICE 31 ⋆⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple ou l'énoncé correct.

1. Trois vecteurs deux à deux non colinéaires forment toujours une base de l'espace.
2. Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, alors $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.
3. Deux plans qui n'ont aucun point commun sont parallèles.

4. Deux droites qui n'ont aucun point commun sont parallèles.
5. Un plan admet une infinité de vecteurs normaux.
6. Une droite admet une unique représentation paramétrique.
7. Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.
8. Si $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 32 : LES SPHÈRES ⋆⋆

Cet exercice introduit une notion qui ne figure pas au programme, mais qui se déduit entièrement de la formule de distance entre deux points : l'équation cartésienne d'une sphère. Aucune connaissance nouvelle n'est nécessaire, seulement les outils du chapitre.

On rappelle que la **sphère** de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

Partie A : de la définition à l'équation

1. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\,;2\,;-1)$ et de rayon 3. Traduire la condition $\Omega M = 3$ à l'aide de la formule donnant la distance entre deux points.
2. Les deux membres étant positifs, on peut élever au carré. En déduire que $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si :
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$
3. Développer et réduire cette égalité pour obtenir une équation de la forme $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.
4. Écrire, sans calcul supplémentaire, l'équation de la sphère de centre $\Omega(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de rayon R sous la forme développée.

Partie B : reconnaître une sphère

Le problème réciproque est plus délicat : toute équation de la forme $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ n'est pas nécessairement celle d'une sphère. Pour trancher, on regroupe les termes et on utilise les identités remarquables, exactement comme pour la forme canonique d'un trinôme.

5. Vérifier que $x^2-6x = (x-3)^2 - 9$, puis, sur le même modèle, écrire y^2+4y et z^2-2z sous forme canonique.
6. En déduire que l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que
$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$$
est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
7. Procéder de même avec l'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+14=0$. Que constate-t-on ?
8. Procéder enfin de même avec $x^2+y^2+z^2-2x+4y+9=0$. Conclure.
9. Résumer en une phrase les trois cas possibles pour un tel ensemble de points.

EXERCICE 33 : SPHÈRES ET PLANS ⋆⋆⋆

On réutilise dans cet exercice la notion introduite à l'exercice 32.

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant :
$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$$
1. Démontrer que $\mathcal{S}$ est une sphère, dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

2. Le point $A(1\,;1\,;3)$ appartient-il à $\mathcal{S}$? Et le point $B(0\,;0\,;0)$?
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + 2z - 7 = 0$. Calculer la distance de Ω à $\mathcal{P}$.
4. En comparant cette distance au rayon, justifier que $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{S}$.
   On admettra que l'intersection est alors un cercle, dont le centre est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.
5. Déterminer les coordonnées du centre ω de ce cercle.
6. Soit M un point de ce cercle. Justifier que le triangle $\Omega\omega M$ est rectangle en ω, puis, à l'aide du théorème de Pythagore, calculer le rayon r du cercle.
7. Soit $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $2x - y + 2z - 19 = 0$. Calculer la distance de Ω à $\mathcal{P}'$ et en déduire la position relative de $\mathcal{P}'$ et de $\mathcal{S}$.
8. Déterminer alors les coordonnées de leur unique point commun.
9. Soit $\mathcal{P}''$ le plan d'équation $2x - y + 2z - 25 = 0$. Quelle est sa position relative avec $\mathcal{S}$?
10. Déterminer toutes les valeurs du réel k pour lesquelles le plan d'équation $2x - y + 2z + k = 0$ est tangent à $\mathcal{S}$.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points

$$A(1\,;0\,;0) \qquad B(0\,;2\,;0) \qquad C(0\,;0\,;3)$$

1. Justifier que O, A, B et C ne sont pas coplanaires : ils forment donc un tétraèdre.
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), puis déterminer une équation cartésienne de ce plan.
3. Calculer la distance du point O au plan (ABC).
4. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de O sur le plan (ABC), et vérifier la distance obtenue à la question 3.
5. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.
6. Calculer $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$, puis $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$. En déduire l'aire du triangle ABC.
7. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ en prenant pour base le triangle OAB.
8. Retrouver ce volume en prenant cette fois pour base le triangle ABC, et pour hauteur la distance calculée à la question 3.

Pour aller plus loin

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

L'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, avec $\vec{u} \neq \vec{0}$. En étudiant le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \|x\vec{u} + \vec{v}\|^2$, montrer que

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

et que cette inégalité est une égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Montrer que, si x, y et z sont trois réels tels que $x^2+y^2+z^2=1$, alors $x+y+z \leqslant \sqrt{3}$. Caractériser le cas d'égalité.

3. L'espace est muni d'un repère orthonormé. Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, avec $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$, et $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de l'espace. Sans utiliser le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, montrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$:
$$AM \geqslant \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
puis que cette valeur est atteinte en un unique point de $\mathcal{P}$.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Médianes d'un triangle, médianes d'un tétraèdre.

1. Soient A, B, C trois points non alignés de l'espace et I le milieu de $[BC]$. Déduire de l'identité du parallélogramme (exercice 9) une expression de AI^2 en fonction de AB^2, BC^2 et CA^2.

2. Soit G le point défini par $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Montrer que les trois médianes du triangle ABC passent par G.

3. Soit $ABCD$ un tétraèdre. On appelle *médianes* du tétraèdre les quatre droites qui joignent un sommet au centre de gravité de la face opposée, et *bimédianes* les trois segments qui joignent les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les quatre médianes et les trois bimédianes passent par un même point, que l'on caractérisera par une relation vectorielle.

4. Montrer que la somme des carrés des longueurs des trois bimédianes est égale au quart de la somme des carrés des longueurs des six arêtes.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆⋆

Puissance d'un point par rapport à une sphère. Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon R (exercice 32), et A un point de l'espace. On mène par A une droite Δ coupant $\mathcal{S}$ en deux points M_1 et M_2, éventuellement confondus.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ de norme 1. Montrer que la relation
$$\left\|\overrightarrow{OA}+t\vec{u}\right\|^2 = R^2$$
définit une équation du second degré en t, dont on déterminera les coefficients.

2. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{AM_2}$ est indépendant de Δ.

3. Selon la position de A par rapport à $\mathcal{S}$, quel est le signe de ce produit scalaire ? Que vaut-il lorsque Δ est tangente à $\mathcal{S}$?

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆⋆

Droite d'Euler d'un triangle, point de Monge d'un tétraèdre.

1. Soient ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. On définit le point H par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Montrer que H appartient aux trois hauteurs du triangle ABC.

2. Soit G le centre de gravité de ABC. Montrer que $\overrightarrow{OH}=3\,\overrightarrow{OG}$. Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?

3. Soient $ABCD$ un tétraèdre et O le centre de la sphère passant par ses quatre sommets, dont on admet l'existence. On définit le point M par
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$
Pour chaque arête du tétraèdre, on considère le plan passant par le milieu de cette arête et orthogonal à l'arête opposée. Montrer que ces six plans passent par M, et situer M par rapport à O et au point G de l'exercice 36.