CORRIGÉ – CHAPITRE 5

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Exponentielle : calculs, équations et dérivées

EXERCICE 1 ⋆

On applique les propriétés algébriques : $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$, $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$ *et* $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

a) $\mathrm{e}^{3-5} = \boxed{\mathrm{e}^{-2}}$

b) $\mathrm{e}^{2x+x+1} = \boxed{\mathrm{e}^{3x+1}}$

c) $\mathrm{e}^{5x-2x} = \boxed{\mathrm{e}^{3x}}$

d) $\mathrm{e}^{-3x} = \boxed{\mathrm{e}^{-3x}}$

e) $\mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^0 = \boxed{1}$

f) $\mathrm{e}^{(2x+1)-(x-3)} = \boxed{\mathrm{e}^{x+4}}$

g) $\mathrm{e}^{2x-3x} = \boxed{\mathrm{e}^{-x}}$

h) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x = \boxed{\mathrm{e}^x + 1}$

i) $\boxed{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)}$

j) voir ci-dessous : $\boxed{4}$

Détail de la question j). On reconnaît l'identité $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$ avec $a = \mathrm{e}^x$ et $b = \mathrm{e}^{-x}$:

$$\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 = 4 \times \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 4\,\mathrm{e}^0 = 4$$

Le résultat ne dépend pas de x, ce qui n'était pas évident au départ.

EXERCICE 2 ⋆

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$*, elle est en particulier injective :* $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ *équivaut à* $a = b$.

a) $x = \boxed{3}$

b) $2x = x + 3$, donc $\boxed{x = 3}$

c) $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^0$ donne $3x + 1 = 0$, donc $\boxed{x = -\dfrac{1}{3}}$

d) $x^2 - 2 = -x \iff x^2 + x - 2 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 8 = 9$, d'où $\boxed{x = 1 \text{ ou } x = -2}$

e) $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$, donc $2x = x + 6$ et $\boxed{x = 6}$

f) $x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0$, donc $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 3}$

EXERCICE 3 ⋆

La stricte croissance permet cette fois de conserver le sens de l'inégalité : $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ *équivaut à* $a < b$.

a) $\boxed{S =]2\,;+\infty[}$

b) $2x - 1 \leqslant x + 3$, donc $\boxed{S =]-\infty\,;4]}$

c) $x^2 < 3x \iff x(x-3) < 0$, ce qui a lieu entre les racines : $\boxed{S =]0\,;3[}$

d) $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$, donc $\boxed{S = [0\,;+\infty[}$

e) $-x < 2x + 9 \iff -9 < 3x$, donc $\boxed{S =]-3\,;+\infty[}$

f) Le produit est négatif ou nul lorsque les deux facteurs sont de signes contraires. Or $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - \mathrm{e} \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$:

$$\boxed{S = [0\,;1]}$$

EXERCICE 4 ⋆

On applique $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$*, complétée par les règles du produit et du quotient.*

a) $\boxed{f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x}}$

b) $\boxed{f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x+1}}$

c) $\boxed{f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}}$

d) $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = \boxed{(x+1)\mathrm{e}^x}$

e) $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = \boxed{x(2-x)\mathrm{e}^{-x}}$

f) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{3x} + 3(2x+1)\mathrm{e}^{3x} = \boxed{(6x+5)\mathrm{e}^{3x}}$

g) $f'(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \boxed{\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}}$

h) $u(x) = \dfrac{1}{x}$ donne $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, d'où $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

i) $\boxed{f'(x) = 3\,\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x+1)^2}$

j) $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}(x+1) - \mathrm{e}^{2x}}{(x+1)^2} = \boxed{\dfrac{(2x+1)\mathrm{e}^{2x}}{(x+1)^2}}$

EXERCICE 5 ⋆⋆

a) $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (x^2-3)\,\mathrm{e}^x = (x^2+2x-3)\,\mathrm{e}^x = \boxed{(x+3)(x-1)\mathrm{e}^x}$

Le facteur e^x étant strictement positif, f' a le signe du trinôme, négatif entre ses racines :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$6\mathrm{e}^{-3}$	↘	$-2\mathrm{e}$	↗	

b) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x-2)\mathrm{e}^{-x} = \boxed{(3-x)\mathrm{e}^{-x}}$, du signe de $3-x$: f est croissante sur $]-\infty\,;3]$, décroissante sur $[3\,;+\infty[$, avec un maximum $f(3) = \mathrm{e}^{-3}$.

c) $f'(x) = \boxed{\mathrm{e}^x - 1}$, qui s'annule en 0 et est du signe de x : f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, croissante sur $[0\,;+\infty[$, avec un minimum $f(0) = 1$.

On retrouve l'inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ *du cours*, puisque $f(x) = \mathrm{e}^x - x \geqslant 1$.

d) $f'(x) = (2x-4)\,\mathrm{e}^{x^2-4x} = \boxed{2(x-2)\mathrm{e}^{x^2-4x}}$, du signe de $x-2$: f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$, croissante sur $[2\,;+\infty[$, avec un minimum $f(2) = \mathrm{e}^{-4}$.

EXERCICE 6 ⋆

a) $\boxed{+\infty}$

b) $\boxed{0}$

c) $\boxed{0}$

d) $\boxed{+\infty}$

e) $\boxed{2}$

f) $\boxed{0}$

g) $\boxed{1}$

h) $\boxed{0}$

Détails. Pour f), $-x^2 \to -\infty$ donc $\mathrm{e}^{-x^2} \to 0$. Pour g), $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, donc le dénominateur tend vers 1. Pour h), $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$ quand $x \to -\infty$, donc le dénominateur tend vers $+\infty$ et le quotient vers 0.

Interprétation graphique. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ admet donc deux asymptotes horizontales :

$$\boxed{\text{la droite } y = 1 \text{ en } +\infty \quad \text{et} \quad \text{la droite } y = 0 \text{ en } -\infty.}$$

Cette fonction, appelée fonction logistique, sert de modèle à de nombreux phénomènes de saturation.

EXERCICE 7 ⋆⋆

a) Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, levée par le théorème 1 avec $n = 3$: $\boxed{+\infty}$

b) $x^2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$, inverse du précédent : $\boxed{0}$

c) Forme indéterminée $0 \times \infty$, levée par le théorème 1 avec $n = 3$: $\boxed{0}$

d) $\dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, somme de deux termes tendant vers 0 : $\boxed{0}$

e) Forme indéterminée $\infty - \infty$. On factorise par e^x :

$$\mathrm{e}^x - x^5 = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x^5}{\mathrm{e}^x}\right)$$

Or $\dfrac{x^5}{\mathrm{e}^x} \to 0$, donc la parenthèse tend vers 1 et le produit vers $\boxed{+\infty}$.

f) $x\,\mathrm{e}^x \to 0$ par croissances comparées, donc $\boxed{-3}$

g) On pose $X = 2x$, qui tend vers 0 :

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x} = 2 \times \frac{\mathrm{e}^X - 1}{X} \longrightarrow 2 \times 1 = \boxed{2}$$

h) $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{3x} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{3}}$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. On factorise haut et bas par e^x :

$$\frac{\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x} = \frac{\mathrm{e}^x\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}}{1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}} \longrightarrow \frac{1+0}{1-0} = \boxed{1}$$

2. De même :
$$\frac{2\mathrm{e}^x - x}{3\mathrm{e}^x + 1} = \frac{2 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}}{3 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}} \longrightarrow \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

3. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\,(1 + \mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$. Le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers 1 : $\boxed{+\infty}$

4. $x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 1\right)$. La parenthèse tend vers -1 et e^x vers $+\infty$: $\boxed{-\infty}$

5. Ici $\mathrm{e}^x \to 0$ quand $x \to -\infty$, il n'y a donc aucune indétermination :
$$\frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 2} \longrightarrow \frac{0 + 1}{0 - 2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Quand $x \to -\infty$: $x + 1 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, donc par produit
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

2. On écrit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}$. Par croissances comparées, le premier terme tend vers 0, et le second aussi :
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$
$$\boxed{\text{La droite d'équation } y = 0 \text{ est asymptote horizontale à } \mathcal{C} \text{ en } +\infty.}$$

3. $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(1 - (x+1)) = \boxed{-x\,\mathrm{e}^{-x}}$

4. Le facteur e^{-x} étant strictement positif, f' a le signe de $-x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

5. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc la tangente est horizontale :
$$\boxed{y = 1}$$

6. $f(x) = 0$ équivaut à $(x+1)\mathrm{e}^{-x} = 0$. Comme $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, il reste $x + 1 = 0$, soit $\boxed{x = -1}$. Le signe de f est alors celui de $x + 1$:
$$\boxed{f(x) < 0 \text{ sur }]-\infty\,;-1[\quad \text{et} \quad f(x) > 0 \text{ sur }]-1\,;+\infty[.}$$

EXERCICE 10 ⋆

a) $\ln\left(\dfrac{12}{3}\right) = \boxed{\ln(4)}$

b) $\ln(2\times 50) = \ln(100) = \boxed{2\ln(10)}$

c) $\boxed{3}$

d) $\boxed{5}$

e) $-\ln(\mathrm{e}) = \boxed{-1}$

f) $\ln(9)+\ln(5)-\ln(45) = \ln\left(\dfrac{45}{45}\right) = \boxed{0}$

g) $\dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

h) $\boxed{2x}$

i) $4\ln(2)-4\ln(2) = \boxed{0}$

j) $2\ln(a)+\ln(b)-2\ln(a)-\ln(b) = \boxed{0}$

Attention : la propriété $\ln(a^n) = n\ln(a)$ n'a de sens que pour $a>0$. C'est pourquoi l'énoncé de la question j) précise $a>0$ et $b>0$.

EXERCICE 11 ⋆

a) Condition d'existence : $x>0$. Alors $\boxed{x=\mathrm{e}^3}$.

b) C.E. : $x>\dfrac{1}{2}$. On a $\ln(2x-1)=\ln(1)$, donc $2x-1=1$ et $\boxed{x=1}$, qui convient.

c) C.E. : $x>-2$ et $x>\dfrac{4}{3}$, soit $x>\dfrac{4}{3}$. L'équation donne $x+2=3x-4$, soit $\boxed{x=3}$, qui convient.

d) C.E. : $x>0$. Alors $\ln(x^2)=\ln(9)$ donne $x^2=9$, d'où $x=3$ ou $x=-3$; seule $\boxed{x=3}$ convient.

e) C.E. : $x>0$ et $x>-3$, soit $x>0$. L'équation devient

$$\ln(x(x+3))=\ln(10) \iff x^2+3x-10=0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 9+40=49$, d'où $x=2$ ou $x=-5$. Seule $\boxed{x=2}$ convient.

f) C.E. : $x>1$. L'équation devient $\ln(x^2-1)=\ln(8)$, soit $x^2=9$, d'où $x=3$ ou $x=-3$; seule $\boxed{x=3}$ convient.

EXERCICE 12 ⋆

1. $\mathrm{e}^x=5$ donne $\boxed{x=\ln(5)}$. $\mathrm{e}^{2x-1}=7$ donne $2x-1=\ln(7)$, soit $\boxed{x=\dfrac{\ln(7)+1}{2}}$.

2. On pose $X=\mathrm{e}^x$, avec $X>0$. L'équation devient $X^2-3X+2=0$, de discriminant $\Delta=1$, d'où $X=1$ ou $X=2$. Les deux valeurs étant positives :

$$\mathrm{e}^x=1 \text{ ou } \mathrm{e}^x=2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x=0 \text{ ou } x=\ln(2)}$$

3. En multipliant par e^x, qui est non nul :

$$\mathrm{e}^{2x}+6=5\,\mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^x+6=0$$

Avec $X=\mathrm{e}^x$: $X^2-5X+6=0$ donne $X=2$ ou $X=3$, d'où $\boxed{x=\ln(2) \text{ ou } x=\ln(3)}$.

4. $X^2-X-6=0$ donne $X=3$ ou $X=-2$. La valeur -2 est à rejeter car $\mathrm{e}^x>0$:

$$\boxed{x=\ln(3)}$$

5. C.E. : $x > 0$. On pose $X = \ln(x)$: $X^2 - 3X + 2 = 0$ donne $X = 1$ ou $X = 2$, d'où

$$\boxed{x = \mathrm{e} \text{ ou } x = \mathrm{e}^2}$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

a) $3x = \ln(4)$, donc $\boxed{x = \dfrac{\ln(4)}{3}}$

b) $x + 1 = 2 - x$, donc $\boxed{x = \dfrac{1}{2}}$

c) $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{3}$, donc $x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{-\ln(3)}$

d) C.E. : $x > -\dfrac{1}{2}$. Alors $2x + 1 = \mathrm{e}^2$, donc $\boxed{x = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}}$

e) $x^2 = 2x + 3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$, de discriminant 16 : $\boxed{x = 3 \text{ ou } x = -1}$

f) Comme $\mathrm{e}^x \neq 0$, on divise par e^x : $\mathrm{e}^x = 3$, donc $\boxed{x = \ln(3)}$

g) Avec $X = \mathrm{e}^x$: $X^2 - 5X + 6 = 0$ donne $X = 2$ ou $X = 3$, d'où $\boxed{x = \ln(2) \text{ ou } x = \ln(3)}$

h) $X^2 + X - 12 = 0$ donne $X = 3$ ou $X = -4$; on rejette -4 : $\boxed{x = \ln(3)}$

i) En multipliant par e^x : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 = 0$, soit $X^2 - X - 2 = 0$, d'où $X = 2$ ou $X = -1$; on rejette -1 : $\boxed{x = \ln(2)}$

j) C.E. : $x > 0$. Alors $\ln(x) = 2$ ou $\ln(x) = -2$: $\boxed{x = \mathrm{e}^2 \text{ ou } x = \mathrm{e}^{-2}}$

k) C.E. : $x > 0$ et $x > 2$, soit $x > 2$. L'équation devient $x^2 - 2x = 3$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$, d'où $x = 3$ ou $x = -1$. Seule $\boxed{x = 3}$ convient.

l) C.E. : $x > 0$. Alors $\ln\left(x^2\right) = \ln(x+6)$ donne $x^2 - x - 6 = 0$, d'où $x = 3$ ou $x = -2$. Seule $\boxed{x = 3}$ convient.

m) C.E. : $x^2 - 3x > 0$, c'est-à-dire $x < 0$ ou $x > 3$. L'équation donne $x^2 - 3x - 4 = 0$, d'où $x = 4$ ou $x = -1$.
Les deux valeurs conviennent, car $-1 < 0$ et $4 > 3$:

$$\boxed{x = -1 \text{ ou } x = 4}$$

C'est le piège de l'exercice : on rejette d'ordinaire les valeurs négatives, mais ici c'est $x^2 - 3x$, et non x, qui doit être strictement positif.

n) C.E. : $x > 0$. Un produit est nul si l'un des facteurs l'est :

$$\mathrm{e}^x = 2 \text{ ou } \ln(x) = 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x = \ln(2) \text{ ou } x = \mathrm{e}}$$

Les deux valeurs sont bien strictement positives.

o) On reconnaît une identité remarquable : $\left(\mathrm{e}^x - 2\right)^2 = 0$, donc $\mathrm{e}^x = 2$:

$$\boxed{x = \ln(2)}$$

La racine est double, mais l'équation n'a qu'une seule solution.

EXERCICE 14 ⋆

a) C.E. : $x > 0$. Alors $\ln(x) < \ln\left(e^2\right)$, et par stricte croissance $\boxed{S =]0\,;e^2[}$

b) C.E. : $x > \dfrac{1}{3}$. Alors $3x - 1 \geqslant 1$, soit $x \geqslant \dfrac{2}{3}$: $\boxed{S = \left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[}$

c) $\boxed{S =]\ln(4)\,;+\infty[}$

d) $-2x \leqslant \ln(3)$, et en divisant par -2 le sens change : $\boxed{S = \left[-\dfrac{\ln(3)}{2}\,;+\infty\right[}$

e) C.E. : $x > 0$ et $x > \dfrac{3}{2}$, soit $x > \dfrac{3}{2}$. Alors $x \geqslant 2x - 3$, soit $x \leqslant 3$: $\boxed{S = \left]\dfrac{3}{2}\,;3\right]}$

f) $\boxed{S =]-\infty\,;-\ln(2)[}$, car $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Les deux membres étant strictement positifs, on applique le logarithme. On veillera au signe de $\ln(q)$ *lorsque* $0 < q < 1$ *: la division change alors le sens de l'inégalité.*

1. $0{,}8^n \leqslant 0{,}001 \iff n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}001)$. Comme $\ln(0{,}8) < 0$:

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}8)} \approx 30{,}96 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{n = 31}$$

2. $1{,}05^n \geqslant 2 \iff n\ln(1{,}05) \geqslant \ln(2)$. Ici $\ln(1{,}05) > 0$:

$$n \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} \approx 14{,}21 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{n = 15}$$

3. Le capital vaut $3\,000 \times 1{,}03^n$ au bout de n années. On résout :

$$3\,000 \times 1{,}03^n > 5\,000 \iff 1{,}03^n > \frac{5}{3} \iff n > \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}03)} \approx 17{,}28$$

$$\boxed{\text{Au bout de 18 ans.}}$$

4. La population est multipliée par 0,85 chaque heure. On résout $0{,}85^n \leqslant 0{,}01$:

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}85)} \approx 28{,}34 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{n = 29 \text{ heures.}}$$

5. On résout $0{,}5^n \leqslant 0{,}01$:

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \approx 6{,}64 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{n = 7 \text{ demi-vies, soit } 42 \text{ heures.}}$$

EXERCICE 16 ⋆

a) $x-3>0$: $\boxed{D_f=]3\,;+\infty[}$

b) $2x+5>0$: $\boxed{D_f=\left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[}$

c) $x^2-4>0$, c'est-à-dire $(x-2)(x+2)>0$, vrai à l'extérieur des racines :

$$\boxed{D_f=]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[}$$

d) $-x^2+4x>0$, soit $x(4-x)>0$, vrai entre les racines : $\boxed{D_f=]0\,;4[}$

e) Le quotient $\dfrac{x-1}{x+2}$ est strictement positif à l'extérieur de $[-2\,;1]$:

$$\boxed{D_f=]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[}$$

f) Il faut $x>0$ pour le logarithme et $x\neq 1$ pour le quotient : $\boxed{D_f=]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[}$

EXERCICE 17 ⋆

On applique $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$.

a) $\boxed{\dfrac{3}{3x+1}}$

b) $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

c) $\boxed{\ln(x)+1}$

d) $\boxed{\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}}$

e) $\boxed{\dfrac{2\ln(x)}{x}}$

f) $\boxed{x\,(2\ln(x)+1)}$

g) $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

h) $\boxed{\dfrac{-2}{x^2-1}}$

Détail de la question h). Plutôt que de dériver un quotient dans un logarithme, on sépare d'abord :

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln(x+1)-\ln(x-1)\qquad\text{d'où}\qquad f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{-2}{x^2-1}$$

C'est presque toujours plus rapide : les propriétés algébriques du logarithme simplifient l'expression avant même de dériver.

EXERCICE 18 ⋆⋆

a) $\boxed{-\infty}$ (limite de référence du cours)

b) Croissances comparées : $\dfrac{\ln(x)}{x^2}=\dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{1}{x}\longrightarrow 0\times 0=\boxed{0}$

c) $x^2\ln(x)=x\times(x\ln(x))\longrightarrow 0\times 0=\boxed{0}$

d) $x-\ln(x)=x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. La parenthèse tend vers 1 : $\boxed{+\infty}$

e) Le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers 0^+ : il n'y a pas d'indétermination, $\boxed{-\infty}$

f) $\ln(x+1)-\ln(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. Comme $1+\frac{1}{x}\to 1$ et $\ln(1)=0$: $\boxed{0}$

g) On pose $X=3x$, qui tend vers 0 : $\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=3\times\dfrac{\ln(1+X)}{X}\longrightarrow\boxed{3}$

h) On pose $X=\sqrt{x}$, qui tend vers $+\infty$. Alors $x=X^2$ et $\ln(x)=2\ln(X)$, d'où

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=\frac{2\ln(X)}{X}\longrightarrow 2\times 0=\boxed{0}$$

Le logarithme est donc négligeable même devant $\sqrt{x}$, conformément à la hiérarchie $\ln(x)\ll x^n\ll \mathrm{e}^x$ du cours.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Quand $x\to 0^+$: $x\to 0$ et $-\ln(x)\to+\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty}$

2. $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. Par croissances comparées, la parenthèse tend vers 1, donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

3. $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\boxed{\dfrac{x-1}{x}}$

4. Sur $]0\,;+\infty[$, le dénominateur est positif : f' a le signe de $x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	

5. Le minimum de f vaut $f(1)=1$, donc pour tout $x>0$: $x-\ln(x)\geqslant 1$, soit

$$\boxed{\ln(x)\leqslant x-1}$$

6.

$$\boxed{\text{La courbe du logarithme reste toujours en dessous de la droite d'équation } y=x-1.}$$

Cette droite est d'ailleurs la tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1, puisque $\ln(1)=0$ et $\ln'(1)=1$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Quand $x\to 0^+$: $\ln(x)\to-\infty$ et $\dfrac{1}{x}\to+\infty$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

par croissances comparées.

$$\boxed{\text{Asymptote verticale } x=0 \text{ et asymptote horizontale } y=0 \text{ en } +\infty.}$$

2. $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \boxed{\dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}}$

3. Le dénominateur est positif : g' a le signe de $1 - \ln(x)$, positif pour $\ln(x) < 1$, c'est-à-dire $x < \mathrm{e}$.

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

4. Le maximum de g est atteint en e et vaut $g(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$:

$$\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

5. $g(x) = 0$ équivaut à $\ln(x) = 0$, soit $\boxed{x = 1}$. Le signe de g est celui de $\ln(x)$:

$$\boxed{g < 0 \text{ sur }]0\,;1[\quad \text{et} \quad g > 0 \text{ sur }]1\,;+\infty[.}$$

6. Comme $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368 > 0{,}2$, la valeur 0,2 est bien atteinte. Sur $]0\,;\mathrm{e}]$, g est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $\frac{1}{\mathrm{e}}$: d'après le théorème de la bijection, l'équation admet une unique solution. Sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, g est continue et strictement décroissante de $\frac{1}{\mathrm{e}}$ à 0, et $0 < 0{,}2 < \frac{1}{\mathrm{e}}$: une seconde solution.

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0{,}2 \text{ admet exactement deux solutions.}}$$

Valeurs approchées : $x_1 \approx 1{,}30$ et $x_2 \approx 12{,}71$.

Autres exponentielles et logarithmes

EXERCICE 21 ⋆

1. Par définition, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$:

$$2^x = \boxed{\mathrm{e}^{x\ln(2)}} \qquad 3^{2x} = \boxed{\mathrm{e}^{2x\ln(3)}} \qquad 0{,}5^x = \boxed{\mathrm{e}^{x\ln(0{,}5)} = \mathrm{e}^{-x\ln(2)}}$$

2. $\log(1000) = \log\left(10^3\right) = \boxed{3}$ $\qquad \log(0{,}01) = \log\left(10^{-2}\right) = \boxed{-2}$

$\log\left(10^{-5}\right) = \boxed{-5}$ $\qquad \log(1) = \log\left(10^0\right) = \boxed{0}$

3. $(2^x)' = \boxed{\ln(2)\,2^x}$. Comme $\ln(2) > 0$, la fonction est **strictement croissante**.

$3^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln(3)}$, donc $(3^{-x})' = \boxed{-\ln(3)\,3^{-x}}$, négatif : la fonction est **strictement décroissante**.

4. $2^x = 5 \iff x\ln(2) = \ln(5) \iff \boxed{x = \dfrac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx 2{,}32}$

$0{,}5^x \leqslant 0{,}1 \iff x\ln(0{,}5) \leqslant \ln(0{,}1)$. Comme $\ln(0{,}5) < 0$, le sens change :

$$x \geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}5)} \approx 3{,}32 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{S = \left[\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}5)}\,;+\infty\right[}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. **Chimie.**
   (a) $\text{pH} = -\log\left(2{,}5 \times 10^{-4}\right) = -\left(\log(2{,}5) + \log\left(10^{-4}\right)\right) = -\log(2{,}5) + 4 \approx \boxed{3{,}6}$
   La solution est donc **acide**.
   (b) $\text{pH} = 5$ donne $\log\left([\text{H}^+]\right) = -5$, soit $\boxed{\left[\text{H}^+\right] = 10^{-5}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$
   (c) Diviser la concentration par 10 retranche $\log(10) = 1$ à son logarithme, donc
   $$\boxed{\text{le pH augmente de 1.}}$$
2. **Acoustique.**
   (a) $L = 10\log\left(\dfrac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(10^7\right) = \boxed{70\ \text{dB}}$
   (b) Multiplier I par 100 ajoute $10\log(100) = 20$: $\boxed{\text{le niveau augmente de 20 dB.}}$
   (c) Deux sources identiques doublent l'intensité, donc ajoutent $10\log(2) \approx 3$:
   $$\boxed{L \approx 73\ \text{dB, et non 140 dB.}}$$
   Les décibels ne s'additionnent pas : ce sont les intensités qui s'ajoutent, et le logarithme transforme cette somme en une augmentation très modeste.
3. **Numération.** Un entier N possède p chiffres lorsque $p - 1 \leqslant \log(N) < p$.
   $$\log\left(2^{100}\right) = 100\log(2) \approx 30{,}10 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{2^{100}\ \text{compte 31 chiffres.}}$$
   $$\log\left(3^{500}\right) = 500\log(3) \approx 238{,}56 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{3^{500}\ \text{compte 239 chiffres.}}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. **Réponse B.** C'est le théorème des croissances comparées : l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x.
2. **Réponse A.** Croissances comparées également, sous la forme $\lim_{x\to-\infty} x^n \text{e}^x = 0$.
3. **Réponse A.** $(\text{e}^u)' = u'\text{e}^u$ avec $u(x) = 3x$. La réponse C applique à tort la règle des puissances.
4. **Réponse B.** C'est la propriété fondamentale du logarithme, celle que recherchait Neper : transformer un produit en une somme.
5. **Réponse A.** Il faut $x - 2 > 0$, l'inégalité étant *stricte* puisque $\ln(0)$ n'existe pas.
6. **Réponse B.** $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$. La réponse A oublie le facteur u'.
7. **Réponse A.** Croissances comparées : x tend vers 0 plus vite que $\ln(x)$ ne tend vers $-\infty$.
8. **Réponse C.** L'exponentielle est strictement positive : elle ne peut jamais valoir -3.
9. **Réponse B.** $(\text{e}^x)^2 = \text{e}^x \times \text{e}^x = \text{e}^{2x}$. La réponse A confond avec $\text{e}^{(x^2)}$.
10. **Réponse B.** C'est la définition du cours : dans a^x, c'est l'exposant x qui varie, d'où $\text{e}^{x\ln(a)}$. La réponse A correspondrait à x^a.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. **Vraie**. C'est une propriété fondamentale de l'exponentielle, qui justifie que le signe de $u'\mathrm{e}^u$ ne dépende que de u'.
2. **Fausse**. La bonne propriété est $\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$. *Contre-exemple :* $\ln(1+1)=\ln(2)\approx 0{,}69$, alors que $\ln(1)+\ln(1)=0$.
3. **Vraie**. Les deux fonctions se défont l'une l'autre, à condition que $x>0$.
4. **Vraie**. Ici aucune condition n'est nécessaire : e^x est toujours strictement positif, donc $\ln(\mathrm{e}^x)$ existe pour tout réel x.
5. **Fausse**. Elle est définie sur $]0\,;+\infty[$ seulement, puisqu'un réel négatif n'a pas d'antécédent par l'exponentielle.
6. **Vraie**. C'est la proposition 7 du cours : le logarithme croît plus lentement que x.
7. **Vraie**. La fonction ln étant strictement croissante, elle conserve l'ordre — et cela vaut aussi dans l'autre sens.
8. **Fausse**. On a $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$: la courbe monte indéfiniment, même si elle le fait très lentement. *C'est une erreur fréquente*, encouragée par l'aspect très aplati de la courbe.
9. **Vraie**. C'est la conséquence graphique du fait que chacune est la réciproque de l'autre.
10. **Fausse**. Un logarithme peut parfaitement être négatif : c'est le cas dès que $0<x<1$. Ici $\ln(x)=-5$ admet la solution $\boxed{x=\mathrm{e}^{-5}\approx 0{,}0067}$.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

1. **Lecture graphique.**
   (a) La courbe semble se rapprocher de l'axe des abscisses en $-\infty$: on conjecture $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ et une asymptote horizontale d'équation $y=0$. En $+\infty$, la courbe plonge : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
   (b) f semble croissante puis décroissante, avec un maximum atteint pour $x=1$.
   (c) La droite $y=1$ coupe la courbe en **deux** points, l'un d'abscisse comprise entre -2 et -1, l'autre entre 1 et 2.
   (d) La courbe est au-dessus de l'axe avant 2 et en dessous après : f semble positive sur $]-\infty\,;2[$ et négative sur $]2\,;+\infty[$.
2. $f(x)=2\mathrm{e}^x-x\,\mathrm{e}^x$. Or $\mathrm{e}^x\to 0$ et $x\,\mathrm{e}^x\to 0$ par croissances comparées :
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=0}$$
$$\boxed{\text{La droite d'équation } y=0 \text{ est asymptote horizontale en } -\infty.}$$
3. $2-x\to-\infty$ et $\mathrm{e}^x\to+\infty$, donc par produit $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$
4. $f'(x)=-\mathrm{e}^x+(2-x)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(-1+2-x)=\boxed{(1-x)\mathrm{e}^x}$
5. Le facteur e^x est strictement positif : f' a le signe de $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e	↘	$-\infty$

Les conjectures des questions 1.(a) et 1.(b) sont donc démontrées.

6. $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$, d'où $\boxed{T : y = x + 2}$.

7. $f(x) = 0$ équivaut à $(2 - x)\mathrm{e}^x = 0$. Comme $\mathrm{e}^x \neq 0$, il reste $\boxed{x = 2}$, et le signe de f est celui de $2 - x$:

$$\boxed{f > 0 \text{ sur }]-\infty\,;2[\quad \text{et} \quad f < 0 \text{ sur }]2\,;+\infty[.}$$

8. Sur $]-\infty\,;1]$, f est continue et strictement croissante, de 0 à e $\approx 2{,}718$. Comme $1 \in]0\,;\mathrm{e}[$, le théorème de la bijection assure l'existence d'une unique solution α. Sur $[1\,;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante de e à $-\infty$, et $1 < \mathrm{e}$: une unique solution β.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 1 \text{ admet exactement deux solutions.}}$$

À la calculatrice : $f(-1{,}2) \approx 0{,}96 < 1$ et $f(-1{,}1) \approx 1{,}03 > 1$; $f(1{,}8) \approx 1{,}21 > 1$ et $f(1{,}9) \approx 0{,}67 < 1$.

$$\boxed{-1{,}2 < \alpha < -1{,}1 \qquad \text{et} \qquad 1{,}8 < \beta < 1{,}9}$$

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

1. $\ln(x) \to -\infty$ et $-x + 3 \to 3$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

2. Pour $x > 0$, on factorise par x :

$$f(x) = x\left(\frac{2\ln(x)}{x} - 1 + \frac{3}{x}\right)$$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \to 0$, et $\dfrac{3}{x} \to 0$: la parenthèse tend donc vers -1, tandis que $x \to +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

3. $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \boxed{\dfrac{2 - x}{x}}$

4. Sur $]0\,;+\infty[$, f' a le signe de $2 - x$, et le maximum vaut $f(2) = 2\ln(2) - 2 + 3 = 2\ln(2) + 1$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2\ln(2)+1$	↘	$-\infty$

Valeur approchée du maximum : $2\ln(2)+1 \approx 2{,}386$.

5. Sur $]0\,;2]$, f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $2\ln(2)+1>0$: d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α. Sur $[2\,;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante de $2\ln(2)+1$ à $-\infty$: une unique solution β.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x)=0 \text{ admet exactement deux solutions } \alpha<2<\beta.}$$

6. $f(0{,}2)\approx -0{,}42<0$ et $f(0{,}3)\approx 0{,}29>0$; $f(6)\approx 0{,}58>0$ et $f(7)\approx -0{,}11<0$:

$$\boxed{0{,}2<\alpha<0{,}3 \qquad \text{et} \qquad 6<\beta<7}$$

7. D'après le tableau de variations et le signe des valeurs :

$$\boxed{f<0 \text{ sur }]0\,;\alpha[\cup]\beta\,;+\infty[\quad \text{et} \quad f>0 \text{ sur }]\alpha\,;\beta[.}$$

8. $f(1)=2\ln(1)-1+3=2$ et $f'(1)=\dfrac{2-1}{1}=1$, d'où

$$\boxed{y=x+1}$$

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

1. **Lecture graphique.**
   (a) Au bout de 3 heures, on lit environ $\boxed{1{,}5 \text{ mg}}$.
   (b) La droite $y=2{,}5$ coupe la courbe pour $t\approx \boxed{1{,}7 \text{ h}}$.
   (c) La droite $y=1$ coupe la courbe pour $t\approx \boxed{4 \text{ h}}$.
2. $Q(0)=5\,\mathrm{e}^{0}=\boxed{5 \text{ mg}}$
3. $Q'(t)=5\times(-0{,}4)\mathrm{e}^{-0{,}4t}=\boxed{-2\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}}$
   Ce nombre est strictement négatif pour tout t, donc Q est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. C'était prévisible : le médicament est progressivement éliminé par l'organisme.
4. Comme $-0{,}4t\to-\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)=0}$.

$$\boxed{\text{Le médicament finit par être totalement éliminé, sans jamais disparaître complètement.}}$$

5. On résout $Q(t)=2{,}5$:

$$5\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}=2{,}5 \iff \mathrm{e}^{-0{,}4t}=0{,}5 \iff -0{,}4t=\ln(0{,}5) \iff t=\frac{\ln(2)}{0{,}4}$$

$$\boxed{t=\frac{\ln(2)}{0{,}4}\approx 1{,}73 \text{ h, soit environ 1 h 44 min.}}$$

   Ce résultat confirme la lecture graphique de la question 1.(b).
6. On résout $Q(t)<1$:

$$5\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}<1 \iff \mathrm{e}^{-0{,}4t}<0{,}2 \iff -0{,}4t<\ln(0{,}2) \iff t>\frac{\ln(5)}{0{,}4}$$

$$\boxed{t>\frac{\ln(5)}{0{,}4}\approx 4{,}02 \text{ h : une nouvelle injection est nécessaire au bout d'environ 4 heures.}}$$

7. $Q'(0) = -2\,\mathrm{e}^0 = \boxed{-2}$.

   $\boxed{\text{À l'instant de l'injection, le médicament s'élimine au rythme de 2 mg par heure.}}$

   C'est le moment où l'élimination est la plus rapide, puisque $|Q'|$ décroît ensuite.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A

1. **Lecture graphique.** La courbe coupe l'axe des abscisses en **deux** points, l'un d'abscisse comprise entre -2 et -1, l'autre entre 1 et 2. Elle est au-dessus de l'axe à l'extérieur de ces deux valeurs, et en dessous entre elles : g semble donc positive sur $]-\infty\,;\alpha[$ et sur $]\beta\,;+\infty[$, négative sur $]\alpha\,;\beta[$.

2. En $-\infty$: $\mathrm{e}^x \to 0$ et $-x-2 \to +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$.

   En $+\infty$: on factorise par e^x, sous la forme $g(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}\right)$, la parenthèse tendant vers 1 :

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

3. $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, qui s'annule en 0, est négatif avant et positif après.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

4. Sur $]-\infty\,;0]$, g est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $-1 < 0$: le théorème de la bijection donne une unique solution α, qui vérifie $\alpha < 0$. Sur $[0\,;+\infty[$, g est continue et strictement croissante de -1 à $+\infty$: une unique solution $\beta > 0$.

   $$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet exactement deux solutions } \alpha < 0 < \beta.}$$

5. $g(-1{,}9) \approx 0{,}05 > 0$ et $g(-1{,}8) \approx -0{,}03 < 0$; $g(1{,}1) \approx -0{,}10 < 0$ et $g(1{,}2) \approx 0{,}12 > 0$:

   $$\boxed{-1{,}9 < \alpha < -1{,}8 \qquad \text{et} \qquad 1{,}1 < \beta < 1{,}2}$$

6. $\boxed{g > 0 \text{ sur }]-\infty\,;\alpha[\cup]\beta\,;+\infty[\quad \text{et} \quad g < 0 \text{ sur }]\alpha\,;\beta[.}$

Partie B

7. $f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{2x}{2} - 2 = \mathrm{e}^x - x - 2 = \boxed{g(x)}$

8. Le signe de f' est donc celui de g, déterminé à la question 6 :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗	$+\infty$

9. En $-\infty$: $\mathrm{e}^x \to 0$ et $-\dfrac{x^2}{2} - 2x \to -\infty$ (le terme en x^2 l'emporte), donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

   En $+\infty$, on factorise par x^2 :

$$f(x) = x^2\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{x}\right)$$

   Par croissances comparées, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \to +\infty$, donc la parenthèse tend vers $+\infty$: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

10. Par définition, $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^\alpha - \alpha - 2 = 0$, soit $\boxed{\mathrm{e}^\alpha = \alpha + 2}$. En reportant dans f :

$$f(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha = (\alpha + 2) - \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha$$

$$\boxed{f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}}$$

11. Le même raisonnement s'applique à β, puisque $g(\beta) = 0$:

$$\boxed{f(\beta) = 2 - \beta - \frac{\beta^2}{2}}$$

    Avec $\beta \approx 1{,}146$: $f(\beta) \approx 2 - 1{,}146 - 0{,}657 \approx \boxed{0{,}20}$.

EXERCICE 29 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Chaque année, 20 % du parc est mis au rebut : il en reste donc 80 %, soit $0{,}8\,u_n$ machines, auxquelles s'ajoutent les 60 machines neuves :

$$\boxed{u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 60}$$

2. $u_1 = 0{,}8 \times 100 + 60 = \boxed{140}$ $\quad u_2 = 0{,}8 \times 140 + 60 = \boxed{172}$ $\quad u_3 = 0{,}8 \times 172 + 60 = \boxed{197{,}6}$

3. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0{,}8\,u_n + 60 - 300 = 0{,}8\,u_n - 240 = 0{,}8\,(u_n - 300) = 0{,}8\,v_n$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } 0{,}8 \text{ et de premier terme } v_0 = 100 - 300 = -200.}$$

4. On en déduit $v_n = -200 \times 0{,}8^n$, puis $u_n = v_n + 300$:

$$\boxed{u_n = 300 - 200 \times 0{,}8^n}$$

5. Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, on a $0{,}8^n \to 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 300}$.

$$\boxed{\text{Le parc se stabilise à long terme autour de 300 machines.}}$$

6. Pour tout n :

$$u_{n+1} - u_n = -200 \times 0{,}8^{n+1} + 200 \times 0{,}8^n = 200 \times 0{,}8^n\,(1 - 0{,}8) = 40 \times 0{,}8^n > 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

7. On résout :

$$300 - 200 \times 0{,}8^n > 290 \iff 200 \times 0{,}8^n < 10 \iff 0{,}8^n < 0{,}05$$

En appliquant le logarithme, et comme $\ln(0{,}8) < 0$:

$$n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}8)} \approx 13{,}43 \qquad \Longrightarrow \qquad n = 14$$

$$\boxed{\text{Le parc dépassera 290 machines au } 1^{\text{er}} \text{ janvier 2039.}}$$

Vérification : $u_{13} \approx 289{,}0$ et $u_{14} \approx 291{,}2$.

8.
```
def seuil(s):
    u = 100
    n = 0
    while u <= s:
        u = 0.8*u + 60
        n = n + 1
    return n
```

L'appel `seuil(290)` *renvoie bien* `14`.

EXERCICE 30 : L'ALGORITHME DE BRIGGS ⋆⋆⋆

Partie A

1. Démontrons par récurrence la propriété P_n : « $u_n > 0$ ».

   Initialisation : $u_0 = x > 0$ par hypothèse, donc P_0 est vraie.

   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $u_k > 0$. Alors $\sqrt{u_k}$ existe et est strictement positif, donc $u_{k+1} > 0$: la propriété P_{k+1} est vraie.

   Conclusion : Par principe de récurrence, $\boxed{u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

   Cette étape n'est pas une formalité : elle garantit que la racine carrée et le logarithme utilisés ensuite ont bien un sens.

2. Démontrons par récurrence la propriété P_n : « $\ln(u_n) = \dfrac{\ln(x)}{2^n}$ ».

   Initialisation : Pour $n = 0$: $\ln(u_0) = \ln(x)$ et $\dfrac{\ln(x)}{2^0} = \ln(x)$. Vrai.

   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\ln(u_k) = \dfrac{\ln(x)}{2^k}$. Alors, en utilisant $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$:

$$\ln(u_{k+1}) = \ln(\sqrt{u_k}) = \frac{1}{2}\ln(u_k) = \frac{1}{2} \times \frac{\ln(x)}{2^k} = \frac{\ln(x)}{2^{k+1}}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) = \dfrac{\ln(x)}{2^n}.}$

3. Le numérateur $\ln(x)$ est un nombre fixé, tandis que $2^n \to +\infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0}$$

   Comme $u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)}$ et que la fonction exponentielle est continue en 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^0 = 1}$$

4. De la question 2 on tire $2^n = \dfrac{\ln(x)}{\ln(u_n)}$, valable tant que $\ln(u_n) \neq 0$, c'est-à-dire tant que $u_n \neq 1$.
En reportant :
$$v_n = 2^n(u_n - 1) = \boxed{\ln(x) \times \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)}}$$

5. D'après la question 3, $u_n \to 1$, donc $\boxed{t_n = u_n - 1 \longrightarrow 0}$. De plus $u_n = 1 + t_n$, d'où
$$\frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} = \boxed{\frac{t_n}{\ln(1 + t_n)}}$$

6. La limite du cours $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ donne, par passage à l'inverse, $\dfrac{t_n}{\ln(1+t_n)} \longrightarrow 1$. Par produit :
$$v_n = \ln(x) \times \frac{t_n}{\ln(1+t_n)} \longrightarrow \ln(x) \times 1$$
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(x)}$$
L'algorithme calcule donc bien un logarithme, à partir de la seule extraction de racines carrées — ce que Briggs savait faire à la main.

Partie B

```python
from math import sqrt

def briggs(x, n):
    u = x
    for i in range(n):
        u = sqrt(u)
    return 2**n * (u - 1)
```

8. Pour $x = 2$:

n	5	10	20	30	40	50
v_n	0,700 709	0,693 382	0,693 1474	0,693 1472	0,693 115	0,5

9. Jusqu'à $n = 30$, l'approximation s'améliore régulièrement : l'erreur passe de 8×10^{-3} à 2×10^{-9}. Puis tout se dégrade brutalement.

Pour $n = 40$ on perd cinq décimales, et pour $n = 50$ le résultat 0,5 est absurde.

En poursuivant, on obtiendrait même 0 *pour* $n = 60$.

10. Le nombre u_n devient extrêmement proche de 1. Or une machine ne conserve qu'une quinzaine de chiffres significatifs : lorsque u_n vaut par exemple 1,000 000 000 000 6, la soustraction $u_n - 1$ ne conserve qu'un seul chiffre exact, tous les autres ayant été perdus au moment de l'arrondi de u_n.

C'est le phénomène de **cancellation** : soustraire deux nombres très proches détruit la précision. Le facteur 2^n amplifie ensuite l'erreur commise.

11. Le meilleur compromis se situe autour de $\boxed{n = 25 \text{ à } 30}$: assez grand pour que t_n soit petit, assez petit pour que la soustraction reste fiable.
Il est remarquable qu'augmenter le nombre d'itérations puisse dégrader le résultat : en analyse numérique, plus de calculs ne signifie pas toujours plus de précision.

EXERCICE 31 : LA FONCTION PUISSANCE ⋆⋆⋆

1. Pour $a = 3$ et $x = 2$:
$$2^3 = \mathrm{e}^{3\ln(2)} = \left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}$$
La définition coïncide donc bien avec la puissance usuelle.

2. La fonction $x \mapsto a\ln(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, et sa dérivée vaut $\dfrac{a}{x}$. Par composition avec l'exponentielle :
$$f'_a(x) = \frac{a}{x} \times \mathrm{e}^{a\ln(x)} = \frac{a}{x} \times x^a = a \times \frac{x^a}{x} = \boxed{a\,x^{\,a-1}}$$
en utilisant $\dfrac{x^a}{x^1} = \mathrm{e}^{a\ln(x)-\ln(x)} = \mathrm{e}^{(a-1)\ln(x)} = x^{\,a-1}$.

3. Pour $a = \dfrac{1}{2}$, on a $f_a(x) = x^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \sqrt{x}$, et
$$f'_a(x) = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$
On retrouve exactement la dérivée connue depuis la Première.

4. Comme $x^{\,a-1} > 0$ pour tout $x > 0$, le signe de f'_a est celui de a :
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } a > 0 : f_a \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[;\\ \text{si } a = 0 : f_a \text{ est constante égale à } 1;\\ \text{si } a < 0 : f_a \text{ est strictement décroissante.}\end{array}}$$

5. On a $x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$, et $\ln(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$:
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } a > 0 : \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^a = 0;\\ \text{si } a < 0 : \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^a = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty.\end{array}}$$

6. Il suffit de revenir à l'exponentielle :
$$x^a \times x^b = \mathrm{e}^{a\ln(x)} \times \mathrm{e}^{b\ln(x)} = \mathrm{e}^{(a+b)\ln(x)} = \boxed{x^{\,a+b}}$$
$$(x^a)^b = \mathrm{e}^{b\ln(x^a)} = \mathrm{e}^{b\times a\ln(x)} = \boxed{x^{\,ab}}$$
en utilisant $\ln\left(x^a\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{a\ln(x)}\right) = a\ln(x)$.

7. En élevant les deux membres à la puissance $\dfrac{3}{2}$, ce qui est licite d'après la question 6 :
$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \iff x = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}$$
Vérification : $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$.

8. $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, tandis que $2^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln(2)}$. Comme $\sqrt{2} \approx 1{,}414 > 1$ et que la fonction $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante :
$$2^{\sqrt{2}} > 2^1 = 2$$
$$\boxed{2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665 > \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2}$$

EXERCICE 32 : LES INTÉRÊTS COMPOSÉS ET LE NOMBRE E ⋆⋆⋆

Partie A

1. Si $n > |x|$, alors $\left|\dfrac{x}{n}\right| < 1$, donc $\dfrac{x}{n} > -1$ et

$$\boxed{1 + \frac{x}{n} > 0}$$

Le logarithme de ce nombre existe donc, ce qui donne un sens à l'écriture proposée.

2. Par définition de la puissance de base quelconque :

$$w_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\,n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

3. Avec $t_n = \dfrac{x}{n}$, on a $n = \dfrac{x}{t_n}$, d'où

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{t_n} \times \ln(1 + t_n) = \boxed{x \times \frac{\ln(1 + t_n)}{t_n}}$$

4. Le réel x étant fixé et n tendant vers $+\infty$, on a $t_n = \dfrac{x}{n} \longrightarrow 0$. La limite du cours donne alors $\dfrac{\ln(1 + t_n)}{t_n} \longrightarrow 1$, donc l'exposant tend vers x. Par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x}$$

5. Pour $x = 0$, on a $w_n = 1^n = 1$ pour tout n, et $\mathrm{e}^0 = 1$:

$$\boxed{\text{le résultat reste vrai.}}$$

Partie B

6. Il suffit d'appliquer la partie A avec $x = 1$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}}$$

7.

n	10	100	1 000	10 000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2,593 742	2,704 814	2,716 924	2,718 146
Décimales exactes	0	1	2	3

On rappelle que $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,8$.

8. La convergence est très lente : il faut multiplier n par 10 pour gagner une seule décimale.

$$\boxed{\text{L'algorithme de Briggs est incomparablement plus efficace.}}$$

Celui-ci gagnait environ trois décimales à chaque doublement du nombre d'étapes, et atteignait neuf décimales exactes en trente racines carrées seulement.

Cette formule a donc un grand intérêt théorique — elle explique d'où vient le nombre e *— mais aucun intérêt pratique pour le calculer.*

Partie C

9. À chacune des n périodes, le capital est multiplié par $\left(1+\dfrac{0{,}05}{n}\right)$. Au bout d'un an, soit n périodes :

$$\boxed{C_n = 1\,000\left(1+\frac{0{,}05}{n}\right)^n}$$

10.

Capitalisation	annuelle ($n=1$)	mensuelle ($n=12$)	quotidienne ($n=365$)
C_n	1 050,00 €	1 051,16 €	1 051,27 €

11. D'après la partie A appliquée à $x = 0{,}05$:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = 1\,000\,\mathrm{e}^{0{,}05} \approx \boxed{1\,051{,}27\ €}$$

12. Entre la capitalisation quotidienne et la limite théorique, l'écart est inférieur au centime.

Une capitalisation « à chaque seconde » ne rapporterait rien de plus.

Interprétation. Le gain apporté par une capitalisation plus fréquente est **plafonné** : passer de l'annuel au mensuel rapporte 1,16 €, du mensuel au quotidien 0,11 €, et au-delà plus rien du tout. C'est exactement ce que traduit la convergence vers $\mathrm{e}^{0{,}05}$ — et c'est cette observation, faite au XVII$^{\mathrm{e}}$ siècle sur les intérêts composés, qui a mis les mathématiciens sur la piste du nombre e.

Pour aller plus loin

EXERCICE 33 ⋆⋆

Le réel 0 n'est jamais solution, puisque $\mathrm{e}^0 = 1$ alors que $m \times 0^2 = 0$. Pour $x \neq 0$, on peut diviser par $x^2 > 0$:

$$\mathrm{e}^x = mx^2 \iff m = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$$

Il s'agit donc de compter les solutions de l'équation $h(x) = m$, où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$. C'est une fonction dérivable, et

$$h'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x^2 - \mathrm{e}^x \times 2x}{x^4} = \frac{\mathrm{e}^x(x-2)}{x^3}$$

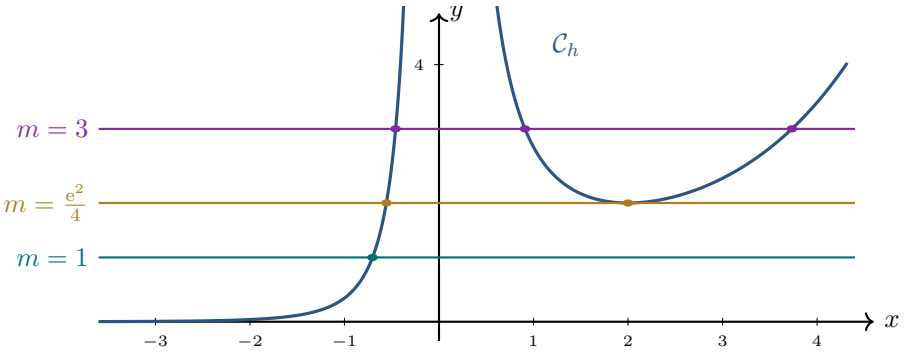
Comme $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $\dfrac{x-2}{x^3}$: positif sur $]-\infty\,;0[$ (deux facteurs négatifs), négatif sur $]0\,;2[$, positif sur $]2\,;+\infty[$.

Pour les limites : en $-\infty$, $\mathrm{e}^x \to 0$ et $x^2 \to +\infty$, donc $h(x) \to 0$ (il n'y a pas de forme indéterminée) ; en 0, $\mathrm{e}^x \to 1$ et $x^2 \to 0^+$, donc $h(x) \to +\infty$ des deux côtés ; en $+\infty$, $h(x) \to +\infty$ par croissances comparées. Enfin $h(2) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} \approx 1{,}847$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{\mathrm{e}^2}{4}$	↗	$+\infty$

On applique le théorème de la bijection sur chacun des trois intervalles où h est continue et strictement monotone. Sur $]-\infty\,;0[$, h prend une fois et une seule chaque valeur de $]0\,;+\infty[$. Sur $]0\,;2]$ et sur $[2\,;+\infty[$, elle prend chacune une fois chaque valeur de $\left[\frac{e^2}{4}\,;+\infty\right[$, la valeur $\frac{e^2}{4}$ n'étant atteinte qu'en $x=2$, commun aux deux intervalles.

$m \leqslant 0$:	aucune solution
$0 < m < \frac{e^2}{4}$:	une solution (négative)
$m = \frac{e^2}{4}$:	deux solutions (une négative, et $x=2$)
$m > \frac{e^2}{4}$:	trois solutions (une négative, deux positives)



On lit sur cette figure que la droite d'équation $y=m$ coupe la courbe de h en un, deux ou trois points selon la position de m par rapport au minimum local $\frac{e^2}{4}$: ce sont les solutions de l'équation.

Remarque. Le passage à l'équation $h(x)=m$, qui *sépare le paramètre*, est la clé : étudier directement $x \mapsto e^x - mx^2$ obligerait à refaire une étude pour chaque valeur de m. Pour $m=1$, par exemple, on apprend sans calcul que les courbes de exp et de $x \mapsto x^2$ ne se coupent qu'une fois, en un point d'abscisse voisine de $-0{,}70$.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. Pour tout réel x, $1+e^x > 0$: f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En $-\infty$, $e^x \to 0$, donc $1+e^x \to 1$ et $f(x) \to \ln(1) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote en $-\infty$. En $+\infty$, $1+e^x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$. On note enfin que $f(0) = \ln(2)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$\ln(2)$	↗	$+\infty$

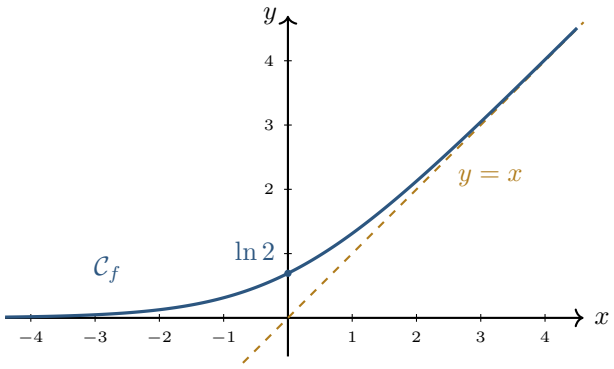
2. Comme $x = \ln(e^x)$, on a, pour tout réel x :

$$f(x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x})$$

Quand $x \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-x} \to 0$, donc $1+\mathrm{e}^{-x} \to 1$ et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \ln(1) = 0}$$

Interprétation. L'écart vertical entre la courbe de f et la droite d'équation $y = x$ tend vers 0 : cette droite est *asymptote oblique* à la courbe en $+\infty$. De plus, $1+\mathrm{e}^{-x} > 1$ donne $f(x) - x > 0$: la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.



Cette figure montre les deux asymptotes : l'axe des abscisses en $-\infty$, et la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$, que la courbe approche par au-dessus.

Remarque. Le calcul de la question 2 est un réflexe à retenir : pour comparer ln(quelque chose) à x, on écrit $x = \ln(\mathrm{e}^x)$ et l'on regroupe les deux logarithmes. En $-\infty$, c'est la limite du cours $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$, appliquée à $t = \mathrm{e}^x \to 0$, qui donne $\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} \to 1$: très à gauche, $f(x)$ est « presque égal » à e^x, au sens où leur quotient tend vers 1.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. C'est la fonction g de l'exercice 20 : f est strictement croissante sur $]0\,;\mathrm{e}]$, de $-\infty$ à $\frac{1}{\mathrm{e}}$, puis strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, de $\frac{1}{\mathrm{e}}$ à 0. Elle s'annule en 1, est négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$.

2. Pour des entiers a et b strictement positifs, la fonction ln étant strictement croissante :

$$a^b = b^a \iff b\ln(a) = a\ln(b) \iff \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \iff f(a) = f(b)$$

Supposons $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Comme f est strictement monotone sur $]0\,;\mathrm{e}]$ et sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, deux réels distincts appartenant à un même de ces deux intervalles ont des images distinctes. On a donc nécessairement $a < \mathrm{e} < b$, et l'entier a vaut 1 ou 2.

- Si $a = 1$, alors $f(b) = f(1) = 0$, ce qui est impossible puisque $f(b) > 0$ pour $b > 1$.
- Si $a = 2$, on remarque que $f(2) = \dfrac{\ln(2)}{2} = \dfrac{2\ln(2)}{4} = \dfrac{\ln(4)}{4} = f(4)$. Comme $4 > \mathrm{e}$ et que f est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, l'entier $b = 4$ est le seul $b > \mathrm{e}$ tel que $f(b) = f(2)$.

$$\boxed{\text{Le seul couple est } (a\,;b) = (2\,;4) : 2^4 = 4^2 = 16.}$$

Remarque. Si l'on cherche des réels et non des entiers, la même étude montre que, pour tout $a \in]1\,;\mathrm{e}[$, il existe un unique réel $b > \mathrm{e}$ tel que $a^b = b^a$: il y a une infinité de couples réels, et l'arithmétique, en imposant a entier, n'en laisse qu'un. L'erreur la plus répandue est de conclure par un simple essai de valeurs : trouver $(2\,;4)$ ne prouve pas qu'il n'y en a pas d'autre, c'est l'étude de f qui le garantit.

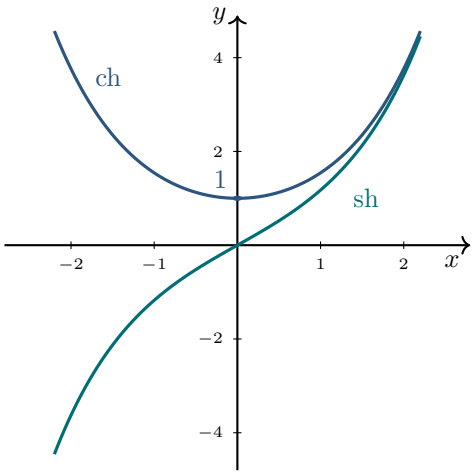
EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

1. La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$, on obtient

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

Comme $\mathrm{ch}(x) > 0$, la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle s'annule en 0, donc elle est négative sur $]-\infty\,;0]$ et positive sur $[0\,;+\infty[$. Par conséquent ch est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$, de minimum $\mathrm{ch}(0) = 1$. On remarque aussi que $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$: ch est paire, sh est impaire. Pour les limites, $\mathrm{e}^x \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ en $+\infty$, donc ch et sh tendent vers $+\infty$; par parité, en $-\infty$, ch $\to +\infty$ et sh $\to -\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}(x) = \mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



On lit sur cette figure la parité de ch (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), l'imparité de sh (courbe symétrique par rapport à l'origine), et le fait que la courbe de ch reste au-dessus de celle de sh, l'écart $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x}$ tendant vers 0 en $+\infty$.

2. La fonction ch est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, avec $\mathrm{ch}(0) = 1$ et une limite $+\infty$: d'après le théorème de la bijection, l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ admet une unique solution $x \geqslant 0$ pour tout $y \geqslant 1$. Pour l'exprimer, on multiplie par $2\mathrm{e}^x > 0$ et l'on pose $X = \mathrm{e}^x$:

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff \mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^x + 1 = 0 \iff X^2 - 2yX + 1 = 0$$

Le discriminant $4y^2 - 4$ est positif ou nul, d'où les racines $X = y \pm \sqrt{y^2-1}$, dont le produit vaut 1. La condition $x \geqslant 0$ équivaut à $X \geqslant 1$: c'est la racine $y + \sqrt{y^2-1}$, qui est supérieure ou égale à $y \geqslant 1$, l'autre valant son inverse.

$$\boxed{x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)}$$

3. De même, sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ et $+\infty$: l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ a une unique solution pour tout réel y. Avec $X = \mathrm{e}^x$, elle devient $X^2 - 2yX - 1 = 0$, de discriminant $4y^2 + 4 > 0$ et de racines $y \pm \sqrt{y^2+1}$. Leur produit vaut -1 : l'une est positive, l'autre négative. Or $X = \mathrm{e}^x > 0$, et $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$ assure que $y + \sqrt{y^2+1} > 0$.

$$\boxed{x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}$$

4. On factorise : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big)\big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big) = \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^x$, d'où

$$\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1}$$

Remarque. Cette relation rappelle $\cos^2 + \sin^2 = 1$, que l'on retrouvera au chapitre 9 : le point de coordonnées $(\cos t\,;\sin t)$ décrit un cercle, tandis que le point $(\mathrm{ch}\,t\,;\mathrm{sh}\,t)$ décrit une branche de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$. C'est l'origine du mot « hyperbolique ».

5. Comme $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 > 0$, la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} - x = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Posons $k(x) = x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$. Alors $k'(x) = \mathrm{ch}(x) + x\,\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) = x\,\mathrm{sh}(x)$, qui est positif puisque x et $\mathrm{sh}(x)$ ont le même signe. La fonction k est donc croissante, et $k(0) = 0$: elle est négative sur $]-\infty\,;0]$ et positive sur $[0\,;+\infty[$. Comme $g'(x) = -\dfrac{k(x)}{\mathrm{ch}(x)}$, la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$: elle atteint son maximum en 0, où elle vaut $\ln(1) - 0 = 0$. Ainsi $\ln\big(\mathrm{ch}(x)\big) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$, et, l'exponentielle étant croissante :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x, \quad \mathrm{ch}(x) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}$$

Vérification : pour $x = 2$, $\mathrm{ch}(2) \approx 3{,}762$ et $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$.
Remarque. Le passage au logarithme est ce qui rend la question abordable : comparer directement $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{e}^{x^2/2}$ conduirait à une dérivée où les deux exponentielles se mélangent. Cette majoration n'est pas une curiosité : elle intervient en probabilités, dans la démonstration de l'inégalité de Hoeffding, qui précise la loi des grands nombres du chapitre 10.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Partie A

1. Fixons y. Les deux membres de l'égalité $f(x+y) = f(x)f(y)$ sont des fonctions dérivables de x, de dérivées respectives $f'(x+y)$ et $f'(x)f(y)$. Elles sont égales, donc $f'(x+y) = f'(x)f(y)$ pour tous réels x et y. En prenant $x = 0$, il vient $f'(y) = f'(0)f(y)$ pour tout réel y, ce qui est le résultat demandé.

2. Notons $k = f'(0)$. Avec $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   - Si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$: f est la fonction nulle.
   - Si $f(0) = 1$, posons $\varphi(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-kx}$. Alors $\varphi'(x) = \big(f'(x) - kf(x)\big)\,\mathrm{e}^{-kx} = 0$ d'après la question 1. La fonction φ, de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, est constante, égale à $\varphi(0) = 1$: donc $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$.

Réciproquement, la fonction nulle convient, et $\mathrm{e}^{k(x+y)} = \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky}$ montre que $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ convient pour tout réel k.

$$\boxed{\text{Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions } x \mapsto \mathrm{e}^{kx},\ k \in \mathbb{R}.}$$

Remarque. La fonction auxiliaire φ est exactement celle qui sert, dans le cours, à démontrer l'unicité de l'exponentielle. En écrivant $k = \ln(a)$ avec $a > 0$, on reconnaît les fonctions $x \mapsto a^x$ de l'exercice 21 : ce sont les seules fonctions dérivables qui transforment les sommes en produits.

Partie B

3. Soit f une solution. Fixons $y > 0$ et dérivons par rapport à x les deux membres de $f(xy) = f(x) + f(y)$: la dérivée de $x \mapsto f(xy)$ est $x \mapsto y\,f'(xy)$, d'où $y\,f'(xy) = f'(x)$. Pour $x = 1$, on obtient $y\,f'(y) = f'(1)$, c'est-à-dire, en notant $c = f'(1)$:

$$\text{pour tout } y > 0, \qquad f'(y) = \frac{c}{y}$$

La fonction $\psi = f - c\ln$ a donc une dérivée nulle sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$: elle est constante. Or, avec $x = y = 1$, on a $f(1) = 2f(1)$, donc $f(1) = 0$, et $\psi(1) = 0$. Ainsi $f = c\ln$. Réciproquement, $c\ln(xy) = c\ln(x) + c\ln(y)$ montre que ces fonctions conviennent.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } x \mapsto c\ln(x),\ c \in \mathbb{R}.}$$

Remarque. Le choix $c = \dfrac{1}{\ln(10)}$ donne le logarithme décimal de l'exercice 21 : tous les logarithmes sont proportionnels. C'est cette propriété de transformer les produits en sommes qui faisait l'intérêt des tables de Briggs (exercice 30), et l'exercice montre qu'aucune autre fonction dérivable ne la possède.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆⋆

Dans tout l'exercice, on utilise la limite du cours $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$, déjà employée aux exercices 30 et 32, et la continuité de l'exponentielle.

1. On a $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$. Posons $t = \dfrac{1}{x^2}$, qui tend vers 0 :

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x \times t \times \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln(1+t)}{t} \longrightarrow 0 \times 1 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1}$$

De même, $g(x) = \mathrm{e}^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ et, avec $t = \dfrac{1}{x} \to 0$:

$$x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x \times \frac{\ln(1+t)}{t} \longrightarrow +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

Remarque. Les deux expressions sont de la forme « 1^∞ », et leurs limites diffèrent ; l'exercice 32 en fournit une troisième, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^x$. C'est la preuve que « 1^∞ » est une forme indéterminée : l'erreur la plus répandue est de penser qu'une puissance de 1 vaut toujours 1, en oubliant que la base n'est pas égale à 1 mais seulement proche de 1.

2. $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$, et $x\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ par croissances comparées (cours, et question 7 de l'exercice 23). Par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^x = \mathrm{e}^0 = 1}$$

3. Prenons $u(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$: elle est à valeurs strictement positives, et $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$ donne $u(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$. Mais

$$u(x)^x = \mathrm{e}^{x\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } x \to 0^+$$

$$\boxed{u(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} \text{ convient : } u(x)^x \to 0 \neq 1.}$$

4. Prenons $v(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)}$ sur $]0\,;1[$: comme $\ln(x) < 0$, elle est à valeurs strictement positives, et $\ln(x) \to -\infty$ donne $v(x) \to 0$. Mais

$$x^{v(x)} = \mathrm{e}^{\,v(x)\ln(x)} = \mathrm{e}^{-1}$$

est constant.

$$\boxed{v(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \text{ convient : } x^{v(x)} = \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 1.}$$

Remarque. Les questions 2 à 4 montrent que « 0^0 » est, lui aussi, une forme indéterminée : selon la vitesse à laquelle la base et l'exposant tendent vers 0, la limite peut valoir 1, 0 ou $\frac{1}{\mathrm{e}}$. La convention $0^0 = 1$, commode en algèbre (pour écrire un polynôme $\sum a_k x^k$ en $x = 0$), ne dit donc rien des limites.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆⋆

Fixons un entier $n \geqslant 1$. Pour $x \in [0\,;2[$, les nombres $1 + \frac{x}{n}$, $2 + x$ et $2 - x$ sont strictement positifs. La fonction ln étant strictement croissante, l'inégalité demandée équivaut à

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leqslant \ln(2 + x) - \ln(2 - x)$$

Posons donc, pour $x \in [0\,;2[$, $h(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) - n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$. La fonction h est dérivable, et, la dérivée de $x \mapsto \ln(2 - x)$ étant $x \mapsto -\dfrac{1}{2-x}$:

$$h'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} - \frac{n \times \frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{4}{4-x^2} - \frac{n}{n+x} = \frac{4(n+x) - n\left(4 - x^2\right)}{\left(4 - x^2\right)(n+x)} = \frac{x\,(nx+4)}{\left(4 - x^2\right)(n+x)}$$

Sur $[0\,;2[$, tous les facteurs sont positifs : $h'(x) \geqslant 0$, donc h est croissante, et $h(x) \geqslant h(0) = \ln(2) - \ln(2) - 0 = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1 \text{ et tout } x \in [0\,;2[, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \frac{2+x}{2-x}}$$

Remarque. D'après l'exercice 32, le membre de gauche tend vers e^x quand n tend vers $+\infty$. Le passage à la limite dans les inégalités donne alors $\mathrm{e}^x \leqslant \dfrac{2+x}{2-x}$ sur $[0\,;2[$. Cette fraction rationnelle est une approximation remarquable de l'exponentielle près de 0 : pour $x = 0{,}1$, elle vaut 1,105 26, alors que $\mathrm{e}^{0,1} \approx 1{,}105\,17$.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆⋆

1. *L'inégalité utilisée.* Le cours donne $\mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$ pour tout réel u, avec égalité seulement pour $u = 0$: la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u - u$, étudiée à la question c) de l'exercice 5, admet en 0 un minimum strict égal à 1. Avec $u = t - 1$, on obtient $t \leqslant \mathrm{e}^{\,t-1}$, avec égalité si et seulement si $t = 1$.

   La démonstration. Notons $S = x_1 + \cdots + x_n$, $P = x_1 x_2 \cdots x_n$ et $m = \dfrac{S}{n} > 0$. Pour chaque i, l'inégalité précédente appliquée à $t = \dfrac{x_i}{m}$ donne

$$0 < \frac{x_i}{m} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x_i}{m} - 1}$$

   On peut multiplier membre à membre ces n inégalités entre nombres strictement positifs :

$$\frac{P}{m^n} \leqslant \mathrm{e}^{\left(\frac{x_1}{m} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{x_n}{m} - 1\right)} = \mathrm{e}^{\frac{S}{m} - n} = \mathrm{e}^0 = 1$$

Donc $P \leqslant m^n$. La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ étant croissante sur $]0\,;+\infty[$ (exercice 31, avec un exposant positif), et $(m^n)^{\frac{1}{n}} = m$ (exercice 31, question 6) :

$$\boxed{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

Le cas d'égalité. Si les x_i sont tous égaux à un même réel a, les deux membres valent a. Réciproquement, si l'un des x_i est différent de m, l'inégalité correspondante est stricte, et le produit d'inégalités entre nombres strictement positifs dont l'une est stricte est strict : on obtient $P < m^n$, et l'inégalité est stricte. Il y a donc égalité si et seulement si tous les x_i valent m, c'est-à-dire sont tous égaux.

Remarque. Le nom vient de ce que $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ est la moyenne *arithmétique* des x_i, et $(x_1 \cdots x_n)^{1/n}$ leur moyenne *géométrique*. Le cas $n = 2$ s'écrit $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ et se démontre en développant $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$; pour n quelconque, c'est l'exponentielle qui fournit l'argument.

2. (a) Le volume vaut $\boxed{V = abc}$. Les six faces sont deux à deux identiques, d'aires ab, bc et ca :

$$\boxed{S = 2(ab + bc + ca)}$$

(b) On applique la question 1 avec $n = 3$ aux nombres ab, bc et ca, dont le produit vaut $(abc)^2 = V^2$:

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geqslant \left(V^2\right)^{\frac{1}{3}} = V^{\frac{2}{3}}$$

Il y a égalité si et seulement si $ab = bc = ca$. Comme a, b, c sont non nuls, $ab = bc$ donne $a = c$, et $bc = ca$ donne $b = a$.

$$\boxed{\text{Égalité si et seulement si } a = b = c \text{ : le parallélépipède est un cube.}}$$

(c) D'après b), $\dfrac{S}{6} \geqslant V^{\frac{2}{3}}$, donc, en élevant à la puissance $\frac{3}{2}$ (fonction croissante), $V \leqslant \left(\dfrac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Cette valeur est atteinte par le cube d'arête $\sqrt{\frac{S}{6}}$, dont l'aire totale est bien $6 \times \frac{S}{6} = S$, et par lui seul d'après le cas d'égalité.

$$\boxed{V_{\max} = \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ atteint uniquement pour le cube.}}$$

Vérification : pour $S = 24$, le cube d'arête 2 a pour volume $8 = 4^{3/2}$, tandis que le parallélépipède de dimensions 1, 2 et $\frac{10}{3}$, de même aire $2\left(2 + \frac{20}{3} + \frac{10}{3}\right) = 24$, n'a pour volume que $\frac{20}{3} \approx 6{,}67$.