EXERCICES – CHAPITRE 5

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Exponentielle : calculs, équations et dérivées

EXERCICE 1 ⋆

Simplifier au maximum chacune des expressions suivantes, où x désigne un réel quelconque.

a) $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-5}$

b) $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{x+1}$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x}}$

d) $(\mathrm{e}^{-x})^3$

e) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$

f) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{x-3}}$

g) $(\mathrm{e}^x)^2 \times \mathrm{e}^{-3x}$

h) $(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^x$

i) $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$ *(on factorisera)*

j) $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$

EXERCICE 2 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3$

b) $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x+3}$

c) $\mathrm{e}^{3x+1} = 1$

d) $\mathrm{e}^{x^2-2} = \mathrm{e}^{-x}$

e) $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{x+6}$

f) $\mathrm{e}^{x^2-3x} = 1$

On utilisera la stricte croissance de l'exponentielle : $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ *équivaut à* $a = b$.

EXERCICE 3 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^2$

b) $\mathrm{e}^{2x-1} \leqslant \mathrm{e}^{x+3}$

c) $\mathrm{e}^{x^2} < \mathrm{e}^{3x}$

d) $\mathrm{e}^x \geqslant 1$

e) $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{2x+9}$

f) $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) \leqslant 0$

EXERCICE 4 ⋆

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur l'ensemble indiqué.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

d) $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

e) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

f) $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$

g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

h) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$

i) $f(x) = (\mathrm{e}^x + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$

j) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

EXERCICE 5 ⋆⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}$: calculer f', la factoriser, puis dresser le tableau de variations de f.

On rappelle que $\mathrm{e}^u > 0$ *pour tout réel* u *: le signe de* f' *ne dépend donc jamais du facteur exponentiel.*

a) $f(x) = (x^2 - 3)\,\mathrm{e}^x$

b) $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^x - x$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-4x}$

Limites et croissances comparées

EXERCICE 6 ⋆

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - 3)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2 + \mathrm{e}^x)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Pour les questions g) et h), interpréter graphiquement les résultats obtenus.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Déterminer les limites suivantes, en précisant à chaque fois la forme indéterminée rencontrée et le théorème de croissances comparées utilisé.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\mathrm{e}^x$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}^x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x - x^5\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x\,\mathrm{e}^x - 3)$

g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{3x}$

EXERCICE 8 ⋆⋆

Méthode : lorsqu'un quotient présente une forme indéterminée, on factorise numérateur et dénominateur par le terme dominant — ici presque toujours e^x*.*

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\mathrm{e}^x - x}{3\mathrm{e}^x + 1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \mathrm{e}^x)$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x-2}$

EXERCICE 9 ⋆⋆

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{-x}$, et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Quelle conséquence graphique en tire-t-on ?
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=-x\,e^{-x}$.
4. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Résoudre l'équation $f(x)=0$, puis déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Logarithme : calculs, équations et inéquations

EXERCICE 10 ⋆

Simplifier au maximum chacune des expressions suivantes.

a) $\ln(12)-\ln(3)$

b) $\ln(2)+\ln(50)$

c) $\ln\left(e^3\right)$

d) $e^{\ln(5)}$

e) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$

f) $2\ln(3)+\ln(5)-\ln(45)$

g) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$

h) $\ln\left(e^{2x}\right)$

i) $\ln(16)-4\ln(2)$

j) $\ln\left(a^2b\right)-2\ln(a)-\ln(b)$ *(avec $a>0$ et $b>0$)*

EXERCICE 11 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. *On commencera systématiquement par déterminer la condition d'existence.*

a) $\ln(x)=3$

b) $\ln(2x-1)=0$

c) $\ln(x+2)=\ln(3x-4)$

d) $2\ln(x)=\ln(9)$

e) $\ln(x)+\ln(x+3)=\ln(10)$

f) $\ln(x-1)+\ln(x+1)=\ln(8)$

EXERCICE 12 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x=5$ puis $e^{2x-1}=7$
2. $e^{2x}-3e^x+2=0$ *(on posera $X=e^x$)*
3. $e^x+6\,e^{-x}=5$ *(on multipliera d'abord par e^x)*
4. $e^{2x}-e^x-6=0$
5. $(\ln(x))^2-3\ln(x)+2=0$ *(on posera $X=\ln(x)$)*

EXERCICE 13 ⋆⋆

Aucune indication n'est donnée dans cet exercice : c'est à vous de reconnaître, pour chaque équation, la méthode qui convient. On n'oubliera jamais de commencer par la condition d'existence lorsqu'un logarithme apparaît.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $e^{3x} = 4$

b) $e^{x+1} = e^{2-x}$

c) $3e^{x} - 1 = 0$

d) $\ln(2x+1) = 2$

e) $e^{x^2} = e^{2x+3}$

f) $e^{2x} = 3e^{x}$

g) $e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$

h) $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$

i) $e^{x} - 2e^{-x} = 1$

j) $(\ln(x))^2 = 4$

k) $\ln(x) + \ln(x-2) = \ln(3)$

l) $2\ln(x) = \ln(x+6)$

m) $\ln\left(x^2 - 3x\right) = \ln(4)$

n) $\left(e^{x} - 2\right)\left(\ln(x) - 1\right) = 0$

o) $e^{2x} - 4e^{x} + 4 = 0$

EXERCICE 14 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\ln(x) < 2$

b) $\ln(3x-1) \geqslant 0$

c) $e^{x} > 4$

d) $e^{-2x} \leqslant 3$

e) $\ln(x) \geqslant \ln(2x-3)$

f) $e^{x} < \dfrac{1}{2}$

Attention au sens de l'inégalité lorsque l'on divise par un logarithme négatif.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}8^{n} \leqslant 0{,}001$.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1{,}05^{n} \geqslant 2$.
3. Un capital de 3 000 € est placé au taux annuel de 3 %. Au bout de combien d'années aura-t-il dépassé 5 000 € ?
4. Une population de bactéries diminue de 15 % par heure. Au bout de combien d'heures aura-t-elle été divisée par 100 ?
5. Un médicament a une demi-vie de 6 heures : la quantité présente dans l'organisme est multipliée par 0,5 toutes les 6 heures. Au bout de combien de demi-vies reste-t-il moins de 1 % de la dose initiale ?

Étude de la fonction logarithme

EXERCICE 16 ⋆

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \ln(x-3)$

b) $f(x) = \ln(2x+5)$

c) $f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$

d) $f(x) = \ln\left(-x^2 + 4x\right)$

e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

f) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

EXERCICE 17 ⋆

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, sur l'intervalle où elle est définie.

a) $f(x) = \ln(3x+1)$

b) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

c) $f(x) = x\ln(x)$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

e) $f(x) = (\ln(x))^2$

f) $f(x) = x^2\ln(x)$

g) $f(x) = \ln\left(\ln(x)\right)$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

EXERCICE 18 ⋆⋆

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(x))$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x+1)-\ln(x))$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Pour la question f), on écrira $\ln(x+1)-\ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *On factorisera par* x.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x-1$.
6. Interpréter graphiquement cette inégalité.

EXERCICE 20 ⋆⋆

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition, et en déduire les asymptotes éventuelles.
2. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de g' et dresser le tableau de variations de g.
4. En déduire que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
5. Résoudre l'équation $g(x) = 0$, puis déterminer le signe de g.
6. Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0{,}2$.

EXERCICE 21 ⋆

1. Écrire sous la forme e^{kx} les expressions 2^x, 3^{2x} et $0{,}5^x$.
2. Calculer, sans calculatrice, $\log(1000)$, $\log(0{,}01)$, $\log\left(10^{-5}\right)$ et $\log(1)$.
3. Déterminer la fonction dérivée de $x \mapsto 2^x$, puis celle de $x \mapsto 3^{-x}$. Préciser à chaque fois le sens de variation.
4. Résoudre l'équation $2^x = 5$, puis l'inéquation $0{,}5^x \leqslant 0{,}1$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Les échelles logarithmiques sont partout en sciences : cet exercice en présente trois.

1. **Chimie.** Le pH d'une solution vaut $-\log\left([\mathrm{H}^+]\right)$, où la concentration s'exprime en $\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.
   (a) Calculer le pH d'une solution de concentration $2{,}5\times10^{-4}$ $\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, arrondi au dixième.
   (b) Déterminer la concentration d'une solution de pH égal à 5.
   (c) Que devient le pH lorsque la concentration est divisée par 10 ?
2. **Acoustique.** Le niveau sonore en décibels vaut $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où $I_0 = 10^{-12}$ $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.
   (a) Calculer le niveau sonore correspondant à $I = 10^{-5}$ $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.
   (b) De combien augmente le niveau sonore lorsque l'intensité est multipliée par 100 ?
   (c) Deux sources identiques de 70 dB fonctionnent ensemble. Quel est le niveau sonore obtenu ? *Le résultat n'est pas* 140 *dB.*
3. **Numération.** Combien de chiffres comporte le nombre 2^{100} ? Et le nombre 3^{500} ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ vaut	0	$+\infty$	1
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x$ vaut	0	$-\infty$	1
3. La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ est	$3\mathrm{e}^{3x}$	e^{3x}	$3x\,\mathrm{e}^{3x-1}$
4. Pour $a>0$ et $b>0$, $\ln(a)+\ln(b)$ vaut	$\ln(a+b)$	$\ln(ab)$	$\ln(a)\times\ln(b)$
5. L'ensemble de définition de $x \mapsto \ln(x-2)$ est	$]2\,;+\infty[$	$[2\,;+\infty[$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$
6. La dérivée de $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$ est	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\dfrac{2x}{x^2+1}$	$2x$
7. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)$ vaut	0	$-\infty$	1
8. L'équation $\mathrm{e}^x=-3$ admet	une solution	deux solutions	aucune solution
9. Pour tout réel x, $(\mathrm{e}^x)^2$ vaut	e^{x^2}	e^{2x}	$2\mathrm{e}^x$
10. Pour $a>0$ et x réel, a^x vaut	$\mathrm{e}^{a\ln(x)}$	$\mathrm{e}^{x\ln(a)}$	x^a

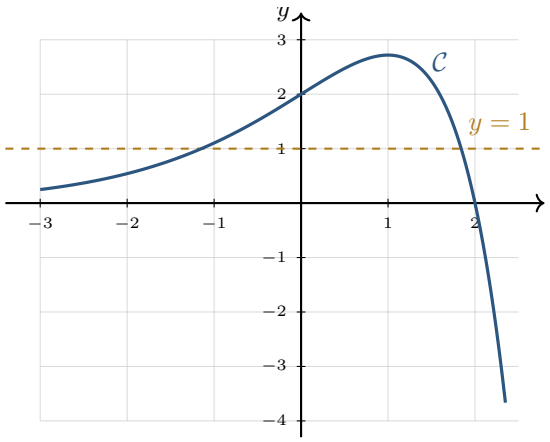
EXERCICE 24 ⋆⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple ou l'énoncé correct.

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$.
2. Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, $\ln(a+b)=\ln(a)+\ln(b)$.
3. Pour tout réel $x>0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$.
4. Pour tout réel x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right)=x$.
5. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}=0$.
7. Si $\ln(a)<\ln(b)$, alors $a<b$.
8. La courbe de la fonction ln admet une asymptote horizontale en $+\infty$.
9. Les courbes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.
10. L'équation $\ln(x)=-5$ n'a pas de solution, car un logarithme est toujours positif.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$. On a représenté ci-dessous sa courbe $\mathcal{C}$, ainsi que la droite d'équation $y = 1$.



1. **Lecture graphique.** Par simple lecture de la figure, conjecturer :
   (a) les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, ainsi que l'existence d'une asymptote ;
   (b) le sens de variation de f et l'abscisse de son maximum ;
   (c) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$, et un encadrement de chacune à l'unité ;
   (d) le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

   Les questions suivantes ont pour but de démontrer ces conjectures.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.
5. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
7. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
8. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$, puis donner un encadrement de chacune d'elles d'amplitude 0,1.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - x + 3$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.
2. Montrer que $f(x) = x\left(\dfrac{2\ln(x)}{x} - 1 + \dfrac{3}{x}\right)$ pour $x > 0$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{2-x}{x}$.
4. Dresser le tableau de variations de f, en précisant la valeur exacte du maximum.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
6. Donner un encadrement de α et de β d'amplitude 0,1 pour α, et d'amplitude 1 pour β.
7. En déduire le signe de f sur $]0\,;+\infty[$.

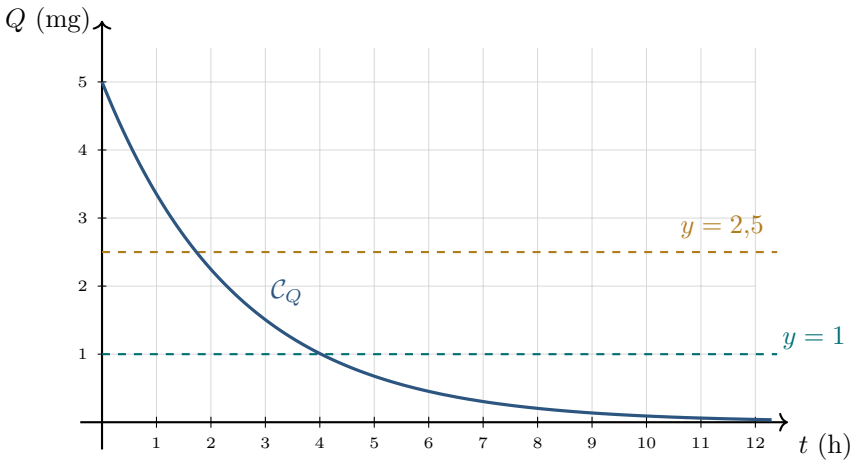
8. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

Après injection, la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient, exprimée en milligrammes, est modélisée par la fonction

$$Q(t) = 5\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$$

où t désigne le temps écoulé depuis l'injection, en heures. La courbe de Q est représentée ci-dessous, ainsi que les droites d'équations $y = 2{,}5$ et $y = 1$.



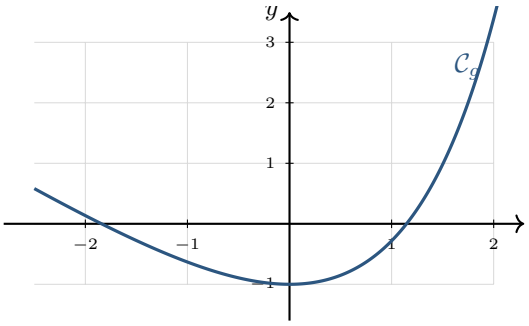
1. **Lecture graphique.** Estimer, par lecture de la figure :
   (a) la quantité présente au bout de 3 heures ;
   (b) le temps au bout duquel la moitié de la dose a été éliminée ;
   (c) le temps au bout duquel il reste moins de 1 mg de médicament.

   Les questions 4 et 5 permettront de confirmer ces lectures par le calcul.
2. Quelle quantité a été injectée à l'instant initial ?
3. Calculer $Q'(t)$ et en déduire le sens de variation de Q sur $[0\,;+\infty[$. Ce résultat était-il prévisible ?
4. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.
5. On appelle **demi-vie** le temps au bout duquel la quantité initiale a été divisée par deux. Calculer la demi-vie de ce médicament, en heures puis en heures et minutes.
6. Le médicament n'est plus actif lorsque la quantité présente devient inférieure à 1 mg. Au bout de combien de temps une nouvelle injection est-elle nécessaire ?
7. Calculer $Q'(0)$ et interpréter ce nombre dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 2$, dont la courbe est représentée ci-dessous.



1. **Lecture graphique.** Conjecturer, à l'aide de la figure, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$, un encadrement de chacune à l'unité, ainsi que le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer $g'(x)$, étudier son signe, puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec $\alpha < 0 < \beta$.
5. Donner un encadrement de α et de β d'amplitude 0,1.
6. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : la fonction étudiée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - 2x$$

7. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = g(x)$.
8. En utilisant la partie A, dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
9. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. *On factorisera par x^2 en $+\infty$.*
10. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \alpha + 2$, puis en déduire que

$$f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$$

Cette écriture a l'avantage de ne plus contenir d'exponentielle.

11. Déterminer de même une expression de $f(\beta)$ sans exponentielle, puis en donner une valeur approchée au centième.

EXERCICE 29 - TYPE BAC ⋆⋆

Une entreprise possède un parc de 100 machines au 1er janvier 2025. Chaque année, elle met au rebut 20 % de son parc et achète 60 machines neuves.

On note u_n le nombre de machines au 1er janvier de l'année $2025 + n$, de sorte que $u_0 = 100$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 60$.
2. Calculer u_1, u_2 et u_3.
3. On pose $v_n = u_n - 300$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 300 - 200 \times 0{,}8^n$$

5. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte.
6. La suite (u_n) est-elle croissante ? Justifier.
7. Déterminer, par le calcul, la plus petite année à partir de laquelle le parc dépassera 290 machines.
8. Recopier et compléter la fonction Python suivante, qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > s$:

```
def seuil(s):
    u = 100
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 30 : L'ALGORITHME DE BRIGGS ⋆⋆⋆

Henry Briggs, cité dans l'introduction du cours, a construit ses tables de logarithmes sans calculatrice, à partir d'une seule opération : l'extraction de racines carrées. Cet exercice reconstitue son idée.

Partie A : le principe

Soit x un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$\ln(u_n) = \frac{\ln(x)}{2^n}$$

3. En déduire la limite de $\ln(u_n)$, puis celle de u_n.
4. On pose $v_n = 2^n(u_n - 1)$. Démontrer que, tant que $u_n \neq 1$:

$$v_n = \ln(x) \times \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)}$$

5. On pose $t_n = u_n - 1$. Justifier que t_n tend vers 0, puis que

$$\frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} = \frac{t_n}{\ln(1 + t_n)}$$

6. En utilisant la limite $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ du cours, conclure que la suite (v_n) converge vers $\ln(x)$.

Partie B : l'algorithme

7. Recopier et compléter la fonction Python suivante, qui renvoie la valeur approchée v_n du logarithme de x :

```
from math import sqrt

def briggs(x, n):
    u = x
    for i in range(n):
        u = ...
    return ...
```

8. On applique cet algorithme à $x = 2$. Recopier et compléter le tableau suivant, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

n	5	10	20	30	40	50
v_n						

On rappelle que $\ln(2) \approx 0{,}693\,147\,180\,6$.

9. Décrire ce que l'on observe lorsque n dépasse 30. Le résultat se rapproche-t-il encore de $\ln(2)$?

10. Proposer une explication. *On pourra remarquer que u_n devient extrêmement proche de 1, et réfléchir à ce que devient la soustraction $u_n - 1$ dans une machine qui ne conserve qu'une quinzaine de chiffres significatifs.*

11. Quelle valeur de n conseilleriez-vous à un utilisateur de cet algorithme ?

EXERCICE 31 : LA FONCTION PUISSANCE ⋆⋆⋆

Le cours a défini $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$ en faisant varier l'exposant. On fixe cette fois l'exposant et l'on fait varier la base.

Pour tout réel a et tout réel $x > 0$, on pose

$$x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$$

et l'on note f_a la fonction ainsi définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. Vérifier que cette définition redonne le résultat attendu pour $a = 3$ et $x = 2$.

2. Démontrer que f_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que

$$f_a'(x) = a\,x^{\,a-1}$$

On retrouve ainsi, pour tout exposant réel, la formule connue pour les exposants entiers.

3. Appliquer ce résultat au cas $a = \dfrac{1}{2}$, et vérifier que l'on retrouve la dérivée de la fonction racine carrée.

4. Étudier le sens de variation de f_a sur $]0\,;+\infty[$, en distinguant les cas $a > 0$, $a = 0$ et $a < 0$.

5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a$ selon le signe de a.

6. Démontrer que pour tous réels a et b et tout $x > 0$:

$$x^a \times x^b = x^{\,a+b} \qquad \text{et} \qquad (x^a)^b = x^{\,ab}$$

7. Résoudre l'équation $x^{\frac{2}{3}} = 4$ d'inconnue $x > 0$.

8. Comparer les nombres $2^{\sqrt{2}}$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2$.

EXERCICE 32 : LES INTÉRÊTS COMPOSÉS ET LE NOMBRE E ⋆⋆⋆

L'introduction du cours signalait que certaines suites d'intérêts composés convergent vers une constante mystérieuse, voisine de 2,718. *Cet exercice reconstitue cette découverte.*

Partie A : la limite

Soit x un réel fixé. Pour tout entier $n > |x|$, on pose

$$w_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1. Justifier que $1 + \dfrac{x}{n} > 0$ pour $n > |x|$, ce qui donne un sens à l'écriture ci-dessus.
2. Démontrer que $w_n = \mathrm{e}^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$.
3. On suppose $x \neq 0$ et l'on pose $t_n = \dfrac{x}{n}$. Démontrer que
$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \times \frac{\ln(1 + t_n)}{t_n}$$
4. Justifier que t_n tend vers 0, puis conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$$
5. Que devient ce résultat pour $x = 0$?

Partie B : le nombre e

6. Déduire de la partie A que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.
7. Calculer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n = 10$, $n = 100$, $n = 1\,000$ et $n = 10\,000$. Combien de décimales exactes de e obtient-on à chaque fois ?
8. Cette convergence vous paraît-elle rapide ? Comparer avec l'algorithme de l'exercice 30.

Partie C : les intérêts composés

Un capital de 1 000 € est placé au taux annuel de 5 %. Les intérêts sont capitalisés n fois par an, chaque versement rapportant $\dfrac{5}{n}$ %.

9. Justifier qu'au bout d'un an, le capital vaut $C_n = 1\,000 \left(1 + \dfrac{0{,}05}{n}\right)^n$.
10. Calculer C_n pour $n = 1$ (intérêts annuels), $n = 12$ (mensuels) et $n = 365$ (quotidiens). On arrondira au centime.
11. Vers quelle valeur tend C_n lorsque n tend vers $+\infty$? Calculer cette limite au centime près.
12. Une banque propose une capitalisation « à chaque seconde ». Le client y gagne-t-il beaucoup par rapport à une capitalisation quotidienne ? Commenter.

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 33 ⋆⋆

Si $m \in \mathbb{R}$, quel est le nombre de réels x tels que $\mathrm{e}^x = mx^2$?

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.
2. Montrer que $f(x) - x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. En utilisant la question 1, déterminer les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant $a < b$ et
$$a^b = b^a$$

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Fonctions hyperboliques. Les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Étudier ces deux fonctions ; en tracer les courbes.
2. Montrer que, pour tout réel $y \geqslant 1$, l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ admet une unique solution x dans $[0\,;+\infty[$, et exprimer cette solution en fonction de y.
3. Montrer que, pour tout réel y, l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ admet une unique solution réelle x, et exprimer cette solution en fonction de y.
4. Pour x réel, calculer $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$.
5. En utilisant la fonction $g : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x)) - \dfrac{x^2}{2}$, montrer que :
$$\text{pour tout réel } x, \qquad \mathrm{ch}(x) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Caractérisations de l'exponentielle et du logarithme.

Partie A. On se propose de déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\text{pour tous réels } x \text{ et } y, \qquad f(x+y) = f(x)\,f(y)$$

1. Soit f une fonction vérifiant les conditions précédentes. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = f'(0)\,f(x)$.
2. Conclure.

Partie B.

3. Trouver les fonctions f dérivables sur $]0\,;+\infty[$ telles que :
$$\text{pour tous réels } x > 0 \text{ et } y > 0, \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆⋆

Les formes indéterminées « 1^∞ » et « 0^0 ». Comme à l'exercice 31, une expression de la forme $u(x)^{v(x)}$, avec $u(x) > 0$, désigne $\mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}$.

1. Trouver les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \qquad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

2. Montrer que x^x tend vers 1 lorsque x tend vers 0^+.
3. Indiquer un exemple de fonction u définie sur $]0\,;1[$, à valeurs strictement positives, tendant vers 0 en 0 et telle que $u(x)^x$ ne tende pas vers 1 lorsque x tend vers 0^+.
4. Indiquer un exemple de fonction v définie sur $]0\,;1[$, à valeurs strictement positives, tendant vers 0 en 0 et telle que $x^{v(x)}$ ne tende pas vers 1 lorsque x tend vers 0^+.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆⋆

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \in [0\,;2[$:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \frac{2+x}{2-x}$$

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆⋆

L'inégalité arithmético-géométrique.

1. Soient $n \geqslant 1$ un entier et x_1, x_2, …, x_n des réels strictement positifs. Montrer que

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

et qu'il y a égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux. On pourra utiliser l'inégalité $t \leqslant \mathrm{e}^{t-1}$, valable pour tout réel t.

2. *Application.* Les arêtes d'un parallélépipède rectangle ont pour longueurs a, b, c. On note V son volume et S son aire totale, c'est-à-dire la somme des aires de ses six faces.
   (a) Calculer V et S en fonction de a, b, c.
   (b) Montrer que $\dfrac{ab+bc+ca}{3} \geqslant V^{\frac{2}{3}}$. À quelle condition y a-t-il égalité ?
   (c) Quel est le volume maximal d'un parallélépipède rectangle d'aire totale S donnée ? Pour quels parallélépipèdes est-il atteint ?