CORRIGÉ – CHAPITRE 6

CALCUL INTÉGRAL

Primitives d'une fonction

EXERCICE 1 ⋆

Il s'agit à chaque fois de dériver F et de comparer le résultat à f.

1. $F(x) = x^3 - 2x + 1$ donne $F'(x) = 3x^2 - 2 = f(x)$:

$$\boxed{F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

2. F est un produit. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 2x - 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

d'où :

$$F'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-1)\mathrm{e}^x = (2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x = (2x+1)\mathrm{e}^x = f(x)$$

$$\boxed{F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

3. Là encore un produit, auquel s'ajoute $-x$:

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x)$$

$$\boxed{F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur }]0\,;+\infty[}$$

4. F est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$, donc $F' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

$$\boxed{F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

On notera que $x^2 + 1$ ne s'annule jamais : F est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. F est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 3 > 0$, donc $F' = \dfrac{u'}{u}$:

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2+3} = f(x) \qquad \boxed{F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

6. F est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x + 1$, donc $F' = -\dfrac{u'}{u^2}$:

$$F'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \neq f(x)$$

$$\boxed{\text{C'est l'affirmation fausse : il manque un signe } -}$$

Pour la corriger, deux possibilités : soit $F(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, soit $F(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est une primitive de $f(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

EXERCICE 2 ⋆

On applique le tableau terme à terme : une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

a) $\boxed{F(x) = x^4 - 3x^2 + 5x}$

b) $\boxed{F(x) = 5x}$

c) $\boxed{F(x) = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{x^3}{9} + 2x}$

d) $f(x) = 2x^2 - x - 3$, donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x}$$

e) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x}$$

f) $f(x) = 3x^3 - 4x$, donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{3x^4}{4} - 2x^2}$$

On remarquera pour c) que $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{x^3}{9}$: le coefficient $\dfrac{1}{3}$ se conserve, et se multiplie au $\dfrac{1}{3}$ venant de l'exposant. Chacune de ces réponses peut bien sûr être augmentée d'une constante.

EXERCICE 3 ⋆

a) $\boxed{F(x) = -\dfrac{1}{x}}$

b) $\boxed{F(x) = 2\sqrt{x}}$

c) $\boxed{F(x) = \mathrm{e}^x}$

d) $\boxed{F(x) = \ln(x)}$

e) $\boxed{F(x) = 3\mathrm{e}^x - 2\ln(x) - \dfrac{1}{x}}$

f) $\boxed{F(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{5x^2}{2}}$

g) $f(x) = x^{-3}$, donc $F(x) = \dfrac{x^{-2}}{-2}$:

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{2x^2}}$$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, donc :

$$\boxed{F(x) = x - \frac{1}{x}}$$

Le piège de la question h) est de vouloir intégrer le numérateur et le dénominateur séparément : il faut d'abord **séparer la fraction** en deux termes.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Une primitive de $u'\,u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$. Toute la difficulté est de vérifier que le facteur placé devant est bien u', et de rétablir la constante manquante sinon.

a) $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$: la forme est exactement $u'\,u^3$.

$$\boxed{F(x) = \frac{(x^2+1)^4}{4}}$$

b) $u(x) = x^2 + 3x$ et $u'(x) = 2x + 3$: la forme est exactement $u'\,u^5$.

$$\boxed{F(x) = \frac{(x^2+3x)^6}{6}}$$

c) $u(x) = 3x - 1$ et $u'(x) = 3$: la forme est exactement $u'\,u^4$.

$$\boxed{F(x) = \frac{(3x-1)^5}{5}}$$

d) $u(x) = x^2 - 4$ et $u'(x) = 2x$. Or le facteur présent est x, soit $\frac{1}{2}u'$:

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \left(x^2 - 4\right)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\left(x^2 - 4\right)^3}{3} = \frac{\left(x^2 - 4\right)^3}{6}}$$

e) $u(x) = 4x - 1$ et $u'(x) = 4$. Le facteur 4 est absent, on le fait apparaître :

$$f(x) = \frac{1}{4} \times 4(4x - 1)^3 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F(x) = \frac{(4x - 1)^4}{16}}$$

f) $u(x) = x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 2x + 1$: la forme est exactement $u'\,u^2$.

$$\boxed{F(x) = \frac{\left(x^2 + x + 1\right)^3}{3}}$$

EXERCICE 5 ⋆⋆

On rappelle qu'une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$, et qu'une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

a) $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, et u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

b) $u(x) = x + 2$, $u'(x) = 1$, avec $u \neq 0$ pour $x \neq -2$:

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x + 2} \quad \text{sur }]-2\,;+\infty[}$$

c) $u(x) = x^2 + 4 > 0$ et $u'(x) = 2x$. Le facteur présent est $\frac{1}{2}u'$:

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2 + 4} \quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

d) $u(x) = 3x - 5$ et $u'(x) = 3$: la forme est exacte.

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{3x - 5} \quad \text{sur } \left]\frac{5}{3}\,;+\infty\right[}$$

e) $u(x) = 2x + 1$ et $u'(x) = 2$. On fait apparaître le facteur 2 :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2x + 1}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F(x) = \sqrt{2x + 1} \quad \text{sur } \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[}$$

f) $u(x) = x^2 + 2x + 3$ et $u'(x) = 2x + 2$: la forme est exacte. De plus $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$, donc u ne s'annule pas.

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x^2 + 2x + 3} \quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Une primitive de $u'\,\mathrm{e}^u$ est e^u, et une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ (avec $u>0$) est $\ln(u)$.

a) $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$: $\boxed{F(x)=\mathrm{e}^{x^2}}$

b) $u(x)=3x$, $u'(x)=3$, absent : $f(x)=\dfrac{1}{3}\times 3\mathrm{e}^{3x}$, d'où $\boxed{F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3}}$

c) $u(x)=-x$, $u'(x)=-1$: $f(x)=-\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$, d'où $\boxed{F(x)=-\mathrm{e}^{-x}}$

d) Le discriminant de x^2+x+5 vaut $\Delta=1-20=-19<0$ et le coefficient dominant est positif : ce trinôme est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x)=x^2+x+5$ et $u'(x)=2x+1$:

$$\boxed{F(x)=\ln\left(x^2+x+5\right)\quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

e) $u(x)=2x+1$, $u'(x)=2$: $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{2x+1}$, d'où $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)\quad \text{sur } \left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[}$

f) $u(x)=x^2+1$, $u'(x)=2x$: $f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$, d'où $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}}$

g) $u(x)=\mathrm{e}^x+1>0$ et $u'(x)=\mathrm{e}^x$: la forme $\dfrac{u'}{u}$ est exacte.

$$\boxed{F(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

h) Ce n'est pas une des deux formes annoncées, mais la forme $u'\,u$ avec $u(x)=\ln(x)$ et $u'(x)=\dfrac{1}{x}$:

$$\boxed{F(x)=\frac{(\ln(x))^2}{2}\quad \text{sur }]0\,;+\infty[}$$

EXERCICE 7 ⋆⋆

a) $x^2-4x+7=(x-2)^2+3>0$. Avec $u(x)=x^2-4x+7$ et $u'(x)=2x-4$, la forme $\dfrac{u'}{u}$ est exacte :

$$\boxed{F(x)=\ln\left(x^2-4x+7\right)\quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

b) $u(x)=x^4$ et $u'(x)=4x^3$, forme $u'\,\mathrm{e}^u$: $\boxed{F(x)=\mathrm{e}^{x^4}\quad \text{sur } \mathbb{R}}$

c) $u(x)=\ln(x)$ et $u'(x)=\dfrac{1}{x}$, forme $u'\,u^3$: $\boxed{F(x)=\dfrac{(\ln(x))^4}{4}\quad \text{sur }]0\,;+\infty[}$

d) $u(x)=x^3+2x+1$ et $u'(x)=3x^2+2$, forme $\dfrac{u'}{u^2}$: $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{x^3+2x+1}\quad \text{sur }]0\,;+\infty[}$

e) $u(x)=\mathrm{e}^x+1$ et $u'(x)=\mathrm{e}^x$, forme $u'\,u^3$: $\boxed{F(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^x+1)^4}{4}\quad \text{sur } \mathbb{R}}$

f) $u(x)=x^2+x$ et $u'(x)=2x+1$, forme $u'\,\mathrm{e}^u$: $\boxed{F(x)=\mathrm{e}^{x^2+x}\quad \text{sur } \mathbb{R}}$

g) $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$: le facteur présent est $\dfrac{1}{2}u'$.

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

h) $u(x) = 3x^2 + 2 > 0$ et $u'(x) = 6x$, forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ exacte : $\boxed{F(x) = 2\sqrt{3x^2+2} \quad \text{sur } \mathbb{R}}$

i) $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$, $u'(x) = 2x + 2$ et le numérateur vaut $\dfrac{1}{2}u'$:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

j) $u(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1 > 0$ et $u'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$: le numérateur vaut $\dfrac{1}{2}u'$.

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}}$$

Pour d), l'intervalle mérite attention : x^3+2x+1 s'annule une fois sur $\mathbb{R}$ (entre -1 et 0), et la fonction n'est donc pas définie partout. Sur $]0\,;+\infty[$, le dénominateur est strictement positif, ce qui suffit.

EXERCICE 8 ⋆

On applique la méthode du cours : une primitive F_0, puis $F = F_0 + k$, puis la condition.

1. $F_0(x) = x^2 - 3x$, donc $F(x) = x^2 - 3x + k$. La condition $F(1) = 4$ donne $1 - 3 + k = 4$, soit $k = 6$:
$$\boxed{F(x) = x^2 - 3x + 6}$$
2. $F_0(x) = x^3 + x$, donc $F(x) = x^3 + x + k$. La condition $F(0) = -2$ donne $k = -2$:
$$\boxed{F(x) = x^3 + x - 2}$$
3. $F(x) = \mathrm{e}^x + k$ et $F(0) = 1 + k = 3$, soit $k = 2$: $\boxed{F(x) = \mathrm{e}^x + 2}$
4. $F(x) = -\dfrac{1}{x} + k$ et $F(1) = -1 + k = 0$, soit $k = 1$: $\boxed{F(x) = -\dfrac{1}{x} + 1}$
5. $F(x) = \ln(x) + k$ et $F(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) + k = 1 + k = 1$, soit $k = 0$: $\boxed{F(x) = \ln(x)}$
6. $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ et $F(4) = 2 \times 2 + k = 4 + k = 5$, soit $k = 1$: $\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} + 1}$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. $F_0(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, donc $F(x) = \mathrm{e}^{x^2} + k$. Or $F(0) = \mathrm{e}^0 + k = 1 + k = 1$, d'où $k = 0$:
$$\boxed{F(x) = \mathrm{e}^{x^2}}$$
2. $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$, donc $F_0(x) = \ln\left(x^2+2x+2\right)$ et $F(x) = \ln\left(x^2+2x+2\right) + k$. Or $F(0) = \ln(2) + k = \ln(2)$, d'où $k = 0$:
$$\boxed{F(x) = \ln\left(x^2+2x+2\right)}$$

3. $F_0(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$, donc $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + k$. Or $F(0) = -\dfrac{1}{2} + k = 0$, d'où $k = \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{F(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{2}}$$

4. $F_0(x) = \sqrt{x^2+9}$, donc $F(x) = \sqrt{x^2+9} + k$. Or $F(0) = \sqrt{9} + k = 3 + k = 5$, d'où $k = 2$:

$$\boxed{F(x) = \sqrt{x^2+9} + 2}$$

5. $F_0(x) = \dfrac{(3x+1)^3}{3}$, donc $F(x) = \dfrac{(3x+1)^3}{3} + k$. Or $F(0) = \dfrac{1}{3} + k = 2$, d'où $k = \dfrac{5}{3}$:

$$\boxed{F(x) = \frac{(3x+1)^3}{3} + \frac{5}{3}}$$

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. Les trois courbes se déduisent les unes des autres par **translation verticale** : elles ont exactement la même forme, décalée vers le haut ou vers le bas. Or deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante, ce qui se traduit graphiquement par une telle translation.

   $$\boxed{\text{Ces trois courbes peuvent donc représenter } F,\ F + k_1 \text{ et } F + k_2}$$

   Elles ont d'ailleurs, pour chaque abscisse, des tangentes parallèles : c'est bien le signe que leurs dérivées coïncident.

2. La courbe de gauche est une parabole coupant l'axe des abscisses en -1 et en 1 :

   $$\boxed{\begin{array}{l} f(x) > 0 \text{ pour } x \in]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[\\ f(x) < 0 \text{ pour } x \in]-1\,;1[\\ f(x) = 0 \text{ pour } x = -1 \text{ et } x = 1 \end{array}}$$

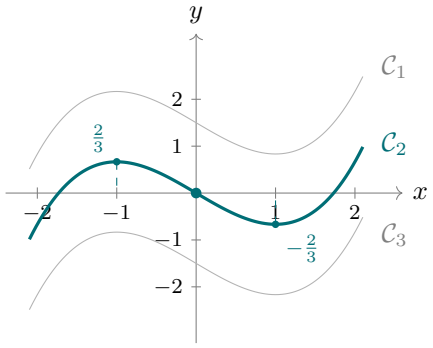
   Les trois courbes de droite sont effectivement croissantes avant -1 et après 1, et décroissantes entre -1 et 1 : elles présentent un maximum local en -1 et un minimum local en 1, exactement là où f s'annule en changeant de signe. La cohérence est donc totale.

3. La primitive cherchée est celle dont la courbe passe par l'origine :

   $$\boxed{\text{c'est } \mathcal{C}_2}$$

   Les deux autres s'en déduisent par translation de 1,5 vers le haut et vers le bas :

   $$\boxed{\mathcal{C}_1 \text{ représente } F + 1{,}5 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_3 \text{ représente } F - 1{,}5}$$



4. Une primitive de $f(x) = x^2 - 1$ est $F_0(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$, donc $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x + k$. La condition $F(0) = 0$ donne $k = 0$:

$$\boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} - x}$$

On calcule alors :

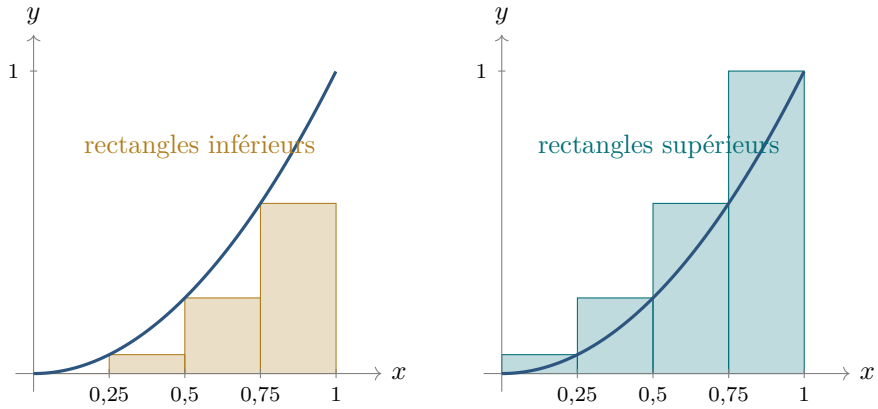
$$F(1) = \frac{1}{3} - 1 = \boxed{-\frac{2}{3} \approx -0{,}67} \qquad \text{et} \qquad F(-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0{,}67}$$

Ces deux valeurs sont bien celles que l'on lit sur $\mathcal{C}_2$: un maximum local d'environ 0,7 en $x = -1$, et un minimum local d'environ $-0{,}7$ en $x = 1$.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Les quatre intervalles sont $[0\,;0{,}25]$, $[0{,}25\,;0{,}5]$, $[0{,}5\,;0{,}75]$ et $[0{,}75\,;1]$. La fonction carré étant croissante sur $[0\,;1]$, la hauteur d'un rectangle inférieur se lit au **bord gauche**, celle d'un rectangle supérieur au **bord droit**.



2. Chaque rectangle a pour largeur $\dfrac{1}{4}$. On somme donc les hauteurs, puis on multiplie par $\dfrac{1}{4}$:

$$s_4 = \frac{1}{4}\left(f(0) + f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{14}{16} = \boxed{\frac{7}{32} = 0{,}21875}$$

$$S_4 = \frac{1}{4}\left(f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f(1)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{30}{16} = \boxed{\frac{15}{32} = 0{,}46875}$$

3. Le domaine contient les rectangles inférieurs et est contenu dans les rectangles supérieurs :

$$\boxed{\frac{7}{32} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{15}{32}} \qquad \text{soit} \qquad 0{,}218 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0{,}469$$

4. Pour un découpage en n intervalles de largeur $\dfrac{1}{n}$:

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ces deux sommes contiennent les mêmes termes, sauf que la première commence par $f(0)$ et s'arrête à $f\left(\frac{n-1}{n}\right)$, tandis que la seconde commence à $f\left(\frac{1}{n}\right)$ et se termine par $f(1)$. Tous les termes intermédiaires se simplifient dans la différence :

$$S_n - s_n = \frac{1}{n}\left(f(1) - f(0)\right) = \frac{1}{n}(1-0) = \boxed{\frac{1}{n}}$$

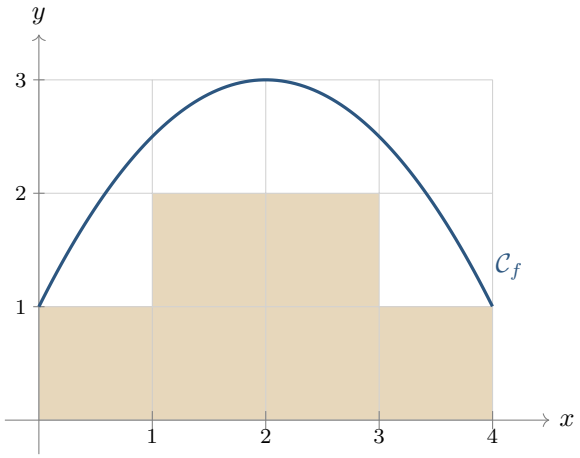
5. On cherche le plus petit entier n tel que $\dfrac{1}{n} < 10^{-2}$, c'est-à-dire $n > 100$:

$$\boxed{n = 101 \text{ intervalles suffisent}}$$

6. On a bien $\dfrac{7}{32} \approx 0{,}219 \leqslant \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333 \leqslant \dfrac{15}{32} \approx 0{,}469$: l'encadrement est cohérent, mais très large. Avec $n = 4$ seulement, on ne connaît pas encore la première décimale de $\mathcal{A}$.

EXERCICE 12 ⋆

1. Sur la figure ci-dessous, les six carreaux entièrement contenus dans le domaine sont coloriés en ocre.



$$\boxed{\text{6 carreaux entiers} \quad ; \quad \text{12 carreaux rencontrés}}$$

En effet, au-dessus de chacune des quatre colonnes, le domaine atteint la troisième rangée : il rencontre donc $4 \times 3 = 12$ carreaux.

2. Chaque carreau ayant une aire de 1 unité d'aire :

$$\boxed{6 \leqslant \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 12}$$

3. Les six carreaux incomplets sont recouverts, à vue, à un peu plus de la moitié chacun. En comptant environ 3,5 carreaux supplémentaires :

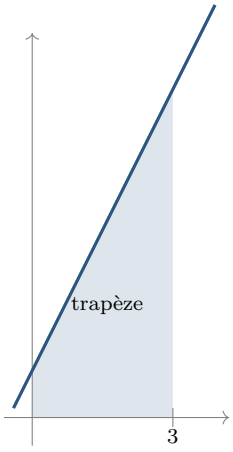
$$\boxed{\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 9{,}5}$$

4. Une primitive de f est $F(x) = -\dfrac{x^3}{6} + x^2 + x$, donc :

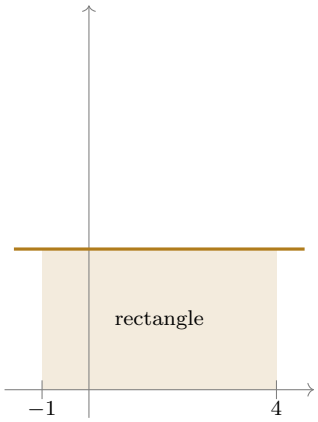
$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} + x^2 + x\right]_0^4 = \left(-\frac{64}{6} + 16 + 4\right) - 0$$
$$= -\frac{32}{3} + 20 = \frac{-32+60}{3} = \boxed{\frac{28}{3} \approx 9{,}33}$$

Ce nombre appartient bien à $[6\,;12]$, et l'estimation 9,5 le prédisait à 0,2 près : le comptage de carreaux donne un ordre de grandeur honnête, mais un encadrement très grossier.

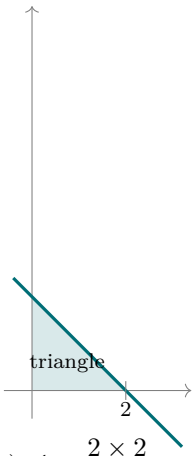
EXERCICE 13 ⋆



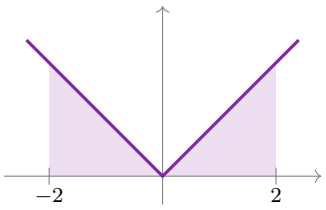
a) $\mathcal{A} = \dfrac{1+7}{2} \times 3 = 12$



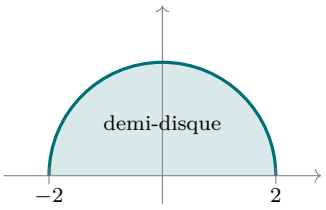
b) $\mathcal{A} = 3 \times 5 = 15$



c) $\mathcal{A} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$



d) $\mathcal{A} = 2 \times \dfrac{2 \times 2}{2} = 4$



e) $\mathcal{A} = \dfrac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi$

a) Trapèze de bases $f(0) = 1$ et $f(3) = 7$, de hauteur 3 : $\boxed{\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x = 12}$

b) Rectangle de hauteur 3 et de base $4 - (-1) = 5$: $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^4 3\,\mathrm{d}x = 15}$

c) Triangle rectangle de base 2 et de hauteur 2 : $\boxed{\displaystyle\int_0^2 (-x+2)\,\mathrm{d}x = 2}$

d) Deux triangles rectangles isocèles de côté 2 : $\boxed{\displaystyle\int_{-2}^2 |x|\,\mathrm{d}x = 4}$

e) Pour $y \geqslant 0$, $y = \sqrt{4-x^2}$ équivaut à $y^2 = 4 - x^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 4$: la courbe est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 2. L'aire cherchée est celle d'un demi-disque de rayon 2 :

$$\boxed{\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi \approx 6{,}28}$$

On vérifie a) par le calcul : $\left[x^2+x\right]_0^3 = 9+3 = 12$. En revanche, aucune primitive de $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ ne figure au tableau : seule la lecture géométrique permet de conclure en e).

EXERCICE 14 ⋆

1. La fonction étant positive, chaque intégrale est l'aire du domaine correspondant :

$$\boxed{\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4{,}2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 6{,}3}$$

2. Les deux domaines se recollent exactement en $x = 2$:

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 4{,}2 + 6{,}3 = \boxed{10{,}5}$$

$$\boxed{\text{On a utilisé la relation de Chasles}}$$

3. Les deux bornes sont égales : le domaine se réduit à un segment, dont l'aire est nulle.

$$\boxed{\int_3^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

4. On lit sur le graphique que la courbe reste comprise entre les deux droites en pointillés :

$$\boxed{m = 1 \qquad \text{et} \qquad M = 3}$$

L'inégalité de la moyenne sur $[0\,;5]$, de longueur 5, donne alors :

$$1 \times 5 \leqslant \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3 \times 5 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{5 \leqslant \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 15}$$

La valeur 10,5 trouvée à la question 2 appartient bien à cet intervalle.

5. L'encadrement est très large : son amplitude vaut 10, pour une intégrale d'environ 10,5. On peut l'améliorer en **découpant l'intervalle** et en appliquant l'inégalité de la moyenne sur chaque morceau, avec des bornes lues localement. Sur $[0\,;2]$, on lit $1{,}2 \leqslant f(x) \leqslant 3$, et sur $[2\,;5]$, $1{,}4 \leqslant f(x) \leqslant 2{,}8$:

$$\underbrace{2 \times 1{,}2}_{=2{,}4} + \underbrace{3 \times 1{,}4}_{=4{,}2} \leqslant \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underbrace{2 \times 3}_{=6} + \underbrace{3 \times 2{,}8}_{=8{,}4}$$

$$\boxed{6{,}6 \leqslant \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 14{,}4}$$

L'amplitude est passée de 10 à 7,8. Plus le découpage est fin, meilleur est l'encadrement : c'est exactement l'idée de la méthode des rectangles.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. (a) La fonction $t \mapsto t^2+1$ est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, Φ est dérivable et sa dérivée est la fonction intégrée :

$$\boxed{\Phi'(x) = x^2 + 1}$$

(b) Les deux bornes sont égales lorsque $x = 1$, donc $\boxed{\Phi(1) = 0}$. Par ailleurs $\Phi'(x) = x^2+1 > 0$ pour tout x :

$$\boxed{\Phi \text{ est strictement croissante sur } [1\,;+\infty[}$$

(c) Une primitive de $t \mapsto t^2+1$ est $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}+t$, donc :

$$\Phi(x) = \left[\frac{t^3}{3}+t\right]_1^x = \left(\frac{x^3}{3}+x\right) - \left(\frac{1}{3}+1\right) = \boxed{\frac{x^3}{3}+x-\frac{4}{3}}$$

On vérifie : $\Phi'(x) = x^2+1$ et $\Phi(1) = \dfrac{1}{3}+1-\dfrac{4}{3} = 0$. Les deux réponses précédentes sont bien confirmées.

2. (a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, donc :

$$\boxed{G'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{G \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$$

(b) C'est tout l'intérêt du théorème : **il donne accès à la dérivée d'une fonction dont on ne connaît pas l'expression**. On peut donc étudier les variations de G, la comparer, l'encadrer, alors même qu'aucune formule ne la décrit à l'aide des fonctions usuelles. La fonction G est d'ailleurs fondamentale en probabilités : c'est elle qui gouverne la loi normale.

3. (a) Le théorème fondamental donne $\boxed{H'(x) = x^2-3x+2}$. Ce trinôme a pour racines 1 et 2 (somme 3, produit 2), et son coefficient dominant est positif :

$$\boxed{H'(x) > 0 \text{ sur } [0\,;1[\,\cup\,]2\,;3] \quad ; \quad H'(x) < 0 \text{ sur }]1\,;2[}$$

(b) Une primitive de $t \mapsto t^2-3t+2$ est $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}-\dfrac{3t^2}{2}+2t$, qui s'annule en 0. Donc $H(x) = \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+2x$, d'où :

$$H(0) = 0 \quad ; \quad H(1) = \frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2 = \frac{5}{6} \quad ; \quad H(2) = \frac{8}{3}-6+4 = \frac{2}{3} \quad ; \quad H(3) = 9-\frac{27}{2}+6 = \frac{3}{2}$$

x	0		1		2		3
$H'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$H(x)$	0	↗	$\frac{5}{6}$	↘	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{3}{2}$

On remarquera que H reste positive sur $[0\,;3]$ bien que la fonction intégrée soit négative sur $]1\,;2[$: l'aire perdue entre 1 et 2 ne suffit pas à compenser celle gagnée avant.

EXERCICE 16 ⋆

On applique à chaque fois le théorème 3 : on cherche une primitive F, puis on calcule $F(b)-F(a)$.

a) $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x = \left[x^3-x^2+x\right]_0^2 = (8-4+2)-0 = \boxed{6}$

b) $\displaystyle\int_1^3 (2x-5)\,\mathrm{d}x = \left[x^2-5x\right]_1^3 = (9-15)-(1-5) = -6+4 = \boxed{-2}$

L'intégrale est négative : c'est normal, la fonction $x \mapsto 2x-5$ est négative sur la plus grande partie de $[1\,;3]$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3+x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\boxed{0}$

La fonction est impaire : les aires situées de part et d'autre de l'origine se compensent exactement.

d) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\left[2\sqrt{x}\right]_{1}^{4}=4-2=\boxed{2}$

e) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2}=-\frac{1}{2}+1=\boxed{\frac{1}{2}}$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x\right]_{0}^{1}=\mathrm{e}-1\approx\boxed{1{,}718}$

g) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\ln(x)\right]_{1}^{\mathrm{e}}=\ln(\mathrm{e})-\ln(1)=1-0=\boxed{1}$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(x^3-2x+3\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-x^2+3x\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}-1+3=\boxed{\frac{9}{4}}$

EXERCICE 17 ⋆⋆

a) Forme $u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x)=x^2$:

$$\int_{0}^{1}2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{0}^{1}=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0=\boxed{\mathrm{e}-1\approx1{,}718}$$

b) Forme $\dfrac{u'}{u}$ à un facteur $\dfrac{1}{2}$ près, avec $u(x)=x^2+1>0$:

$$\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(1)=\boxed{\frac{\ln(2)}{2}\approx0{,}347}$$

c) Forme $u'\,u^2$ avec $u(x)=x^2+x+1$:

$$\int_{0}^{1}(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\left(x^2+x+1\right)^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{26}{3}}$$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}\approx3{,}195}$

e) Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ à un facteur $\dfrac{1}{2}$ près, avec $u(x)=x^2+16$:

$$\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\,\mathrm{d}x=\left[\sqrt{x^2+16}\right]_{0}^{3}=\sqrt{25}-\sqrt{16}=5-4=\boxed{1}$$

f) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_{1}^{2}=\frac{1}{2}\left(\ln(5)-\ln(3)\right)=\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)\approx0{,}255}$

g) Avec $u(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$ et $u'(x)=2x+2$:

$$\int_{0}^{1}\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\left(\ln(6)-\ln(3)\right)=\boxed{\frac{\ln(2)}{2}\approx0{,}347}$$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{0}^{1}=-\mathrm{e}^{-1}+1=\boxed{1-\frac{1}{\mathrm{e}}\approx0{,}632}$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. $\displaystyle\int_0^a (2x+1)\,\mathrm{d}x = \Big[x^2+x\Big]_0^a = a^2+a$. On résout donc :

$$a^2+a=6 \iff a^2+a-6=0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 1+24 = 25$, d'où $a = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ ou $a = \dfrac{-1+5}{2} = 2$. Comme $a>0$:

$$\boxed{a=2}$$

2. $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^a = \ln(a)$. On résout $\ln(a)=2$, soit :

$$\boxed{a = \mathrm{e}^2 \approx 7{,}389}$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+m\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+mx\right]_0^1 = \frac{1}{3}+m$. On résout $\dfrac{1}{3}+m=2$:

$$\boxed{m = \frac{5}{3}}$$

4. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est positive sur $[1\,;b]$, l'aire cherchée est donc l'intégrale :

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b}+1 = 1-\frac{1}{b}$$

On résout $1-\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{b=2}$$

5. $\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^a = \mathrm{e}^a - 1$. On résout $\mathrm{e}^a - 1 = \dfrac{1}{2}$, soit $\mathrm{e}^a = \dfrac{3}{2}$:

$$\boxed{a = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}405}$$

Un tel réel existe donc, et il est unique puisque la fonction exponentielle est strictement croissante.

Propriétés de l'intégrale

EXERCICE 19 ⋆

1. On utilise la linéarité de l'intégrale.

(a) $\displaystyle\int_0^2 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f + \int_0^2 g = 5+(-3) = \boxed{2}$

(b) $\displaystyle\int_0^2 3f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^2 f = 3\times 5 = \boxed{15}$

(c) $\displaystyle\int_0^2 (2f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = 2\times 5 - (-3) = 10+3 = \boxed{13}$

(d) $\displaystyle\int_0^2 (f(x)+4g(x))\,\mathrm{d}x = 5+4\times(-3) = 5-12 = \boxed{-7}$

(e) $\displaystyle\int_0^2 (f(x)+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f + \int_0^2 1\,\mathrm{d}x = 5 + [x]_0^2 = 5+2 = \boxed{7}$

(f) $\displaystyle\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-5}$

Le piège de (e) est d'oublier que $\displaystyle\int_0^2 1\,\mathrm{d}x$ ne vaut pas 1 mais 2 : c'est l'aire d'un rectangle de hauteur 1 et de base 2.

2. Par linéarité, puis en primitivant chaque terme :

$$\int_0^1 (3\mathrm{e}^x - 2x)\,\mathrm{d}x = \Big[3\mathrm{e}^x - x^2\Big]_0^1 = (3\mathrm{e}-1)-(3-0) = \boxed{3\mathrm{e}-4 \approx 4{,}155}$$

3. Non. La linéarité porte sur les **sommes** et les **multiples**, pas sur les produits :

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f\right) \times \left(\int_a^b g\right) \text{ en général}}$$

Un contre-exemple suffit à s'en convaincre : avec $f(x) = g(x) = x$ sur $[0\,;1]$, le membre de gauche vaut $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, tandis que celui de droite vaut $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 20 ⋆

1. La relation de Chasles donne $\displaystyle\int_0^3 f = \int_0^1 f + \int_1^3 f$, d'où :

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 7-2 = \boxed{5} \qquad \text{puis} \qquad \int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-5}$$

2. De même : $\displaystyle\int_{-2}^5 g = \int_{-2}^0 g + \int_0^5 g = 4 + (-1) = \boxed{3}$

3. On sépare l'intervalle en $x=1$, là où l'expression change de forme. Pour $x \in [0\,;1]$, $|x-1| = 1-x$; pour $x \in [1\,;2]$, $|x-1| = x-1$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left((2-2) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \boxed{1}\end{aligned}$$

4. Même découpage :

$$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left(2-\frac{3}{2}\right) = \boxed{1}$$

Géométriquement, la courbe de h est formée de deux segments : le domaine sous la courbe est un triangle de base 2 et de hauteur 1, dont l'aire vaut bien $\dfrac{2\times 1}{2} = 1$.

EXERCICE 21 ⋆

On rappelle que si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$. Il faut donc surveiller *deux* choses : le signe de la fonction, et l'ordre des bornes.

a) $x^3 > 0$ sur $[1\,;2]$ et $1 < 2$: intégrale positive

b) $x^3 < 0$ sur $[-2\,;-1]$ et $-2 < -1$: intégrale négative

c) $\mathrm{e}^{-x} > 0$ partout et $0 < 1$: intégrale positive

d) $1 - x < 0$ sur $]1\,;2]$ et $1 < 2$: intégrale négative

e) $x^2 > 0$ sur $[1\,;2]$, mais **les bornes sont dans l'ordre décroissant** : $\displaystyle\int_2^1 x^2\,\mathrm{d}x = -\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$, donc intégrale négative *(premier piège)*

f) La fonction $x \mapsto x$ est impaire et l'intervalle $[-1\,;1]$ est centré en 0 : les aires situées de part et d'autre de l'origine se compensent exactement. intégrale nulle *(second piège)*

g) Sur $[0\,;1]$, on a $x^2 \leqslant x$, donc $x^2 - x \leqslant 0$: intégrale négative

h) Pour $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $x + 1 \geqslant 1$ donc $\ln(x+1) \geqslant 0$: intégrale positive

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Pour tout x de $[0\,;1]$, on a $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc en multipliant par $x^2 \geqslant 0$: $x^3 \leqslant x^2$. La conservation de l'ordre donne alors :

$$\boxed{\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x}$$

Vérification : $\displaystyle\int_0^1 x^3 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$ et $\displaystyle\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$. On a bien $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3}$.

2. Sur $[1\,;2]$, l'inégalité **change de sens** : $x \geqslant 1$ donne $x^3 \geqslant x^2$, d'où :

$$\boxed{\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x}$$

Vérification : $\displaystyle\int_1^2 x^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$ et $\displaystyle\int_1^2 x^3 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$. On constate que la comparaison de deux fonctions dépend entièrement de l'intervalle considéré : il ne faut jamais l'affirmer sans préciser où.

3. Pour $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant x$. La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^x \qquad \text{soit} \qquad 1 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^x$$

En intégrant sur $[0\,;1]$ (les bornes sont dans le bon ordre) :

$$\int_0^1 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{1 \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e} - 1 \approx 1{,}718}$$

On notera qu'aucune primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ n'est connue : la comparaison est ici le seul outil disponible.

4. Pour $x \in [1\,;2]$, on a $1 \leqslant x \leqslant 2$, donc en passant aux inverses (ce qui renverse l'ordre) : $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$. En intégrant sur $[1\,;2]$, intervalle de longueur 1 :

$$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1}$$

Or $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) \approx 0{,}693$, qui appartient bien à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. (a) Pour $x \in [0\,;2]$, $1+x$ est strictement positif et croissant, donc son inverse est décroissant : f est décroissante sur $[0\,;2]$. Elle est donc encadrée par ses valeurs aux bornes :

$$f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(0) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1}$$

(b) L'inégalité de la moyenne sur $[0\,;2]$, intervalle de longueur 2, donne :

$$\boxed{\frac{2}{3} \leqslant \int_0^2 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2}$$

(c) Avec $u(x) = 1+x > 0$ et $u'(x) = 1$:

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^2 = \ln(3) - \ln(1) = \boxed{\ln(3) \approx 1{,}099}$$

On a bien $\dfrac{2}{3} \approx 0{,}67 \leqslant 1{,}099 \leqslant 2$.

2. Sur $[1\,;4]$, la fonction racine est croissante, donc $1 = \sqrt{1} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{4} = 2$. L'intervalle a pour longueur 3 :

$$\boxed{3 \leqslant \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 6}$$

3. (a) Sur $[1\,;2]$, de longueur 1 : $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{2}$, d'où $1 \leqslant I_1 \leqslant \sqrt{2}$.
Sur $[2\,;4]$, de longueur 2 : $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2$, d'où $2\sqrt{2} \leqslant I_2 \leqslant 4$.
La relation de Chasles donne $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$, d'où en additionnant les deux encadrements :

$$1 + 2\sqrt{2} \leqslant \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{2} + 4$$

$$\boxed{3{,}82 \leqslant \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 5{,}42}$$

(b) L'amplitude est passée de 3 à environ 1,59 : elle a été divisée par presque 2 avec un simple découpage en deux morceaux.

$$\boxed{\text{Découper l'intervalle améliore nettement l'encadrement}}$$

C'est précisément le principe de la méthode des rectangles : plus le découpage est fin, plus l'encadrement se resserre.

(c) Une primitive de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$, donc :

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\times 8 - \frac{2}{3} = \frac{16-2}{3} = \boxed{\frac{14}{3} \approx 4{,}667}$$

Cette valeur appartient bien aux deux encadrements, mais le second la localise beaucoup mieux.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. (a) On étudie le signe de $f(x) - g(x) = x + 2 - x^2$, trinôme de racines -1 et 2 et de coefficient dominant négatif : il est donc positif entre ses racines, donc sur $[-1\,;2]$. **La courbe de f est au-dessus de celle de g.**

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^2 \left(x + 2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 \\ &= \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \boxed{\frac{9}{2} = 4{,}5}\end{aligned}$$

(b) Sur $[0\,;1]$, $x^3 \leqslant x^2$: **la courbe de f est au-dessus**.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

(c) Sur $[0\,;1]$, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$: **la courbe de f est au-dessus**.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x - x]_0^1 = (\mathrm{e} - 1) - 1 = \boxed{\mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718}$$

2. La parabole d'équation $y = 4 - x^2$ coupe l'axe des abscisses en -2 et 2, et elle est au-dessus de cet axe entre ces deux valeurs :

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^2 \left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10{,}67}$$

3. (a) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2 - 1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \boxed{\frac{2}{3}}$

(b) La fonction change de signe en $x = 1$: elle est négative sur $[0\,;1]$ et positive sur $[1\,;2]$. L'aire s'obtient donc en découpant et en prenant l'opposé là où f est négative :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 \left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2 - 1\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{2}\end{aligned}$$

(c) Les deux résultats diffèrent : $\dfrac{2}{3}$ contre 2.

L'intégrale compte négativement la partie située sous l'axe des abscisses

Elle vaut ici $\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$: l'aire au-dessus de l'axe moins celle en dessous. L'aire géométrique, elle, additionne les deux. **Une intégrale n'est une aire que si la fonction garde un signe constant** : c'est le piège le plus fréquent du chapitre.

EXERCICE 25 ⋆

On applique la définition $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) $\mu = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

b) $\mu = \dfrac{1}{3}\left[x^2+x\right]_1^4 = \dfrac{1}{3}(20-2) = \boxed{6}$

c) $\mu = \dfrac{1}{1}\left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \boxed{\mathrm{e}-1 \approx 1{,}718}$

d) $\mu = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\left[\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} = \boxed{\dfrac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0{,}582}$

e) $\mu = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4 = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{16}{3} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

f) $\mu = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right) = \boxed{0}$

Pour la dernière question, la valeur moyenne de $x \mapsto x$ sur $[0\,;a]$ vaut :

$$\mu = \frac{1}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{a}\times\frac{a^2}{2} = \frac{a}{2}$$

On résout $\dfrac{a}{2} = 3$, d'où $\boxed{a = 6}$. C'est cohérent : sur $[0\,;6]$, la fonction varie linéairement de 0 à 6, sa moyenne est donc le milieu, 3.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. $v(0) = 20 - 20\mathrm{e}^0 = 20 - 20 = \boxed{0\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$. C'est cohérent avec l'énoncé : **le mobile démarre à l'arrêt**, sa vitesse initiale est nulle.
2. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ est décroissante, donc $-20\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ est croissante, et v aussi :

   $$\boxed{v \text{ est strictement croissante sur } [0\,;10]}$$

   Le mobile accélère continûment. On remarque de plus que $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ tend vers 0 : la vitesse se rapproche de 20 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ sans jamais l'atteindre. C'est une vitesse limite.
3. L'aire d'un rectangle du repère a pour dimensions 1 seconde par 1 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, soit 1 mètre.

   $$\boxed{\text{L'aire sous la courbe s'exprime en mètres : c'est la distance parcourue}}$$

4. Une primitive de v est $V(t) = 20t+40\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$, car la dérivée de $40\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ vaut $40\times\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = -20\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$. Donc :

   $$\begin{aligned} d &= \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = \left[20t+40\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right]_0^{10} \\ &= \left(200+40\mathrm{e}^{-5}\right) - (0+40) \\ &= \boxed{160+40\mathrm{e}^{-5} \approx 160{,}27\ \mathrm{m}} \end{aligned}$$

5. La valeur moyenne de v sur $[0\,;10]$ est :

   $$\mu = \frac{1}{10}\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{160+40\mathrm{e}^{-5}}{10} \approx \boxed{16{,}03\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

   On retrouve la définition usuelle de la vitesse moyenne : distance parcourue divisée par durée.

6. On calcule $v(10) = 20 - 20\mathrm{e}^{-5} \approx 19{,}87$, donc :

$$\frac{v(0)+v(10)}{2} \approx \frac{0+19{,}87}{2} \approx 9{,}93 \neq 16{,}03$$

Non : la valeur moyenne n'est pas la moyenne des valeurs aux bornes

Ce ne serait le cas que si v était affine. Ici la vitesse croît très vite au début puis stagne près de 20 : le mobile passe donc la majeure partie du trajet à une vitesse élevée, ce qui tire la moyenne vers le haut.

Intégration par parties

EXERCICE 27 ⋆⋆

On rappelle la formule : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

a) On choisit $u(x) = x$, qui se simplifie en dérivant.

$$\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = \mathrm{e}^{2x} \\ v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x\,\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^1$$
$$= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^2+1}{4} \approx 2{,}097}$$

b)

$$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[(x+1)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 1 - (\mathrm{e}-1) = \boxed{\mathrm{e} \approx 2{,}718}$$

c)

$$\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) = \boxed{1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}264}$$

Attention au double signe moins : $-\int u'v$ *avec* $v = -\mathrm{e}^{-x}$ *redonne* $+\int \mathrm{e}^{-x}$.

d) Ici c'est ln qu'il faut dériver : sa dérivée est bien plus simple que lui.

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = x \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \left(1-\frac{1}{4}\right) = \boxed{2\ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0{,}636}$$

e)

$$\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ u'(x) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

$$\int_0^1 (2x-1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \Big[(2x-1)\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}+1) - 2(\mathrm{e}-1) = \boxed{3-\mathrm{e} \approx 0{,}282}$$

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. En écrivant $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$:

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = 1 \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_1^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x} \times x \,\mathrm{d}x = 3\ln(3) - 0 - \int_1^3 1\,\mathrm{d}x$$
$$= 3\ln(3) - \Big[x\Big]_1^3 = 3\ln(3) - 2 \approx \boxed{1{,}296}$$

2. Le calcul précédent montre qu'une primitive de ln est $x \mapsto x\ln(x) - x$. On le vérifie en dérivant :

$$(x\ln(x) - x)' = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

$$\boxed{\text{Une primitive de ln sur }]0\,;+\infty[\text{ est } x \mapsto x\ln(x) - x}$$

C'est le seul moyen d'obtenir cette primitive : elle ne figure dans aucun tableau.

3.

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ v(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = \boxed{1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}264}$$

4.

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = x^2 \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{\mathrm{e}^3}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{2\mathrm{e}^3+1}{9} \approx 4{,}575}$$

5. Avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \ln(x)$, il faudrait d'abord trouver une primitive de ln, soit $v(x) = x\ln(x) - x$, puis calculer :

$$\Big[x^2\,(x\ln(x) - x)\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2x\,(x\ln(x) - x)\,\mathrm{d}x$$

La nouvelle intégrale fait réapparaître un terme en $x^2\ln(x)$: elle est **plus compliquée** que celle de départ.

Ce choix est mauvais : on complique au lieu de simplifier

C'est la règle générale rappelée par le cours : on dérive le facteur qui se simplifie (ln ou un polynôme), on primitive l'autre.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Partie A.

1. $$\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$
$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = \boxed{1}$$

2. On recommence avec $u(x) = x^2$:
$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x^2\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\times 1 = \boxed{\mathrm{e}-2 \approx 0{,}718}$$

La première intégration par parties n'a pas suffi : elle a seulement abaissé l'exposant de 2 à 1. C'est la question 1 qui achève le calcul.

Partie B.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x^0\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \boxed{\mathrm{e}-1 \approx 1{,}718}$

2. Soit n un entier naturel. On pose :
$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ u'(x) = (n+1)x^n \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$
$$\begin{aligned} I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \Big[x^{n+1}\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= \Big(1^{n+1}\mathrm{e} - 0\Big) - (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$
$$\boxed{I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)\,I_n}$$

3. On applique la relation de proche en proche :
$$I_1 = \mathrm{e} - 1\times I_0 = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = \boxed{1}$$
$$I_2 = \mathrm{e} - 2\times I_1 = \mathrm{e} - 2 = \boxed{\mathrm{e}-2 \approx 0{,}718}$$
$$I_3 = \mathrm{e} - 3\times I_2 = \mathrm{e} - 3(\mathrm{e}-2) = \boxed{6-2\mathrm{e} \approx 0{,}563}$$
On retrouve exactement les deux valeurs de la partie A : $I_1 = 1$ et $I_2 = \mathrm{e}-2$.

4. Soit $x \in [0\,;1]$. D'une part $x^n \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc le produit est positif. D'autre part, la fonction exponentielle étant croissante et $x \leqslant 1$: $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$. En multipliant par $x^n \geqslant 0$, ce qui conserve l'ordre :
$$\boxed{0 \leqslant x^n\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}\,x^n}$$

5. On intègre cet encadrement sur $[0\,;1]$, les bornes étant dans le bon ordre :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}\, x^n \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$. Le théorème des gendarmes donne alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

6. I_n est l'aire du domaine situé sous la courbe de $x \mapsto x^n\mathrm{e}^x$ sur $[0\,;1]$. Or sur cet intervalle, x^n tend vers 0 pour tout $x < 1$ lorsque n grandit : la courbe s'écrase sur l'axe des abscisses, ne se relevant que sur un voisinage de plus en plus étroit de 1.

$$\boxed{\text{L'aire sous la courbe tend donc vers } 0}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 30 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**B**	$(x^3-4)' = 3x^2$. La réponse A est la *dérivée* de f, et $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 \neq 3x^2$.
2	**A**	$[x^2]_0^1 = 1$.
3	**B**	C'est la ligne du tableau des primitives : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
4	**B**	Théorème 1 : deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante *additive*, non multiplicative.
5	**A**	$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$. La réponse B oublie le signe de la borne inférieure.
6	**A**	Forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2$: la primitive est e^u, sans facteur supplémentaire.
7	**B**	Chasles : $\int_1^3 f = \int_0^3 f - \int_0^1 f = 5-2 = 3$.
8	**C**	Une intégrale nulle signifie seulement que les aires au-dessus et en dessous de l'axe se compensent. Contre-exemple : $f(x) = x - \frac{1}{2}$ sur $[0\,;1]$.
9	**A**	$\mu = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\times 8 = 2$. La réponse B est l'intégrale, non la moyenne.
10	**B**	Intégration par parties : $[x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$.

EXERCICE 31 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Vraie**. C'est le premier point du théorème 1 du cours : toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives. L'existence est garantie par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en étant une.

2. **Fausse**. Si F est une primitive de f, alors $F+1$, $F+2$, ... en sont aussi. Une fonction continue admet donc une **infinité** de primitives. Par exemple, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2+7$ sont toutes deux des primitives de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

3. **Vraie**. Posons $H = F - G$. Comme $F' = G' = f$, on a $H' = F' - G' = f - f = 0$ sur I. Or une fonction de dérivée nulle sur un *intervalle* est constante :

$$\boxed{F - G \text{ est constante sur } I}$$

4. **Vraie**. C'est la propriété de positivité (proposition 4). Démonstration : soit F une primitive de f ; comme $F' = f \geqslant 0$, F est croissante sur $[a\,;b]$, donc $F(a) \leqslant F(b)$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a) \geqslant 0$.

5. **Fausse**. La réciproque est fausse : les parties situées au-dessus de l'axe peuvent compenser celles situées en dessous. Contre-exemple avec $f(x) = x$ sur $[-1\,;1]$:

$$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 \geqslant 0$$

et pourtant f est strictement négative sur $[-1\,;0[$.

6. **Fausse**. L'intégrale n'est pas multiplicative. Contre-exemple avec $f = g$ définies par $f(x) = x$ sur $[0\,;1]$:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \qquad \text{alors que} \qquad \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

7. **Vraie**. C'est la convention posée en section 6.3.5 du cours. Avec F une primitive de f :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\left(F(b) - F(a)\right) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

8. **Vraie**. Notons m et M le minimum et le maximum de f sur $[a\,;b]$. L'inégalité de la moyenne donne $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f \leqslant M(b-a)$. En divisant par $b - a > 0$:

$$\boxed{m \leqslant \mu \leqslant M}$$

9. **Vraie**. C'est la conservation de l'ordre (proposition 4). La fonction $g - f$ est continue et positive sur $[a\,;b]$, son intégrale est donc positive, et la linéarité permet de conclure.

10. **Fausse**. Ce serait confondre la valeur moyenne avec la valeur au milieu de l'intervalle. Contre-exemple avec $f(x) = x^2$ sur $[0\,;2]$:

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \approx 2{,}67 \qquad \text{alors que} \qquad 2\,f(1) = 2$$

EXERCICE 32 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : lecture graphique.

1. Une primitive F de f est croissante exactement là où f est positive. Or la courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des abscisses en $x = 2$ en passant du positif au négatif, et c'est précisément en $x = 2$ que $\mathcal{C}_1$ atteint son maximum. À l'inverse, le maximum de $\mathcal{C}_2$, situé en $x = 1$, ne correspond à aucun changement de sens sur $\mathcal{C}_1$.

$$\boxed{\mathcal{C}_2 \text{ est la courbe de } f \qquad ; \qquad \mathcal{C}_1 \text{ est celle de } F}$$

2. On lit les ordonnées à l'origine des deux courbes :

$$\boxed{F(0) = 3 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 2}$$

3. Le signe de f se lit sur $\mathcal{C}_2$, et il commande les variations de F :

x	-2		2		$2{,}5$
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		↗	e^2	↘	

La fonction F est donc croissante sur $[-2\,;2]$ puis décroissante sur $[2\,;2{,}5]$, avec un maximum $F(2) = \mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$: c'est bien ce que montre $\mathcal{C}_1$.

Partie B : calcul.

4. G est un produit :

$$\begin{cases} u(x) = 3 - x \\ u'(x) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

$$G'(x) = -\mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x = (-1+3-x)\mathrm{e}^x = (2-x)\mathrm{e}^x = f(x)$$

$$\boxed{G \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Ce n'est pas la seule : toutes les fonctions $G + k$ le sont aussi. On remarque d'ailleurs que $G(0) = 3 = F(0)$: la primitive lue sur le graphique est précisément G.

5.

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(3-x)\mathrm{e}^x\Big]_0^2 = (3-2)\mathrm{e}^2 - (3-0)\mathrm{e}^0 = \boxed{\mathrm{e}^2 - 3 \approx 4{,}39}$$

6. Pour $x \in [0\,;2]$, on a $2 - x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{L'aire du domaine sous } \mathcal{C}_2 \text{ entre 0 et 2 vaut } \mathrm{e}^2 - 3 \approx 4{,}39 \text{ unités d'aire}}$$

7.

$$\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 3}{2} \approx \boxed{2{,}19}$$

C'est cohérent : sur $[0\,;2]$, la courbe de f part de 2, monte jusqu'à $f(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}72$, puis redescend à 0. Une moyenne d'environ 2,2 est bien du bon ordre de grandeur, et elle est comprise entre le minimum 0 et le maximum e de f sur cet intervalle.

EXERCICE 33 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : lecture graphique.

1. On lit sur le quadrillage :

$$\boxed{f(0) \approx 4 \quad ; \quad f(1) \approx 2{,}4 \quad ; \quad f(2) \approx 1{,}5 \quad ; \quad f(3) \approx 0{,}9 \quad ; \quad f(4) \approx 0{,}5}$$

2. La fonction étant décroissante, sur chaque intervalle $[k\,;k+1]$ le minimum est atteint à droite et le maximum à gauche. Les rectangles ayant tous pour largeur 1 :

$$s_4 = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \approx 2{,}4 + 1{,}5 + 0{,}9 + 0{,}5 = \boxed{5{,}3}$$

$$S_4 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \approx 4 + 2{,}4 + 1{,}5 + 0{,}9 = \boxed{8{,}8}$$

3.
$$\boxed{5{,}3 \leqslant \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 8{,}8}$$

En prenant le milieu de cet encadrement, on obtient l'estimation :
$$\boxed{\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{5{,}3+8{,}8}{2} \approx 7{,}1}$$

Partie B : calcul.

4. On calcule : $f(0) = 4$, $f(1) = 4\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 2{,}43$, $f(2) = 4\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}47$, $f(3) = 4\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 0{,}89$ et $f(4) = 4\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}54$.

Les valeurs lues sont bien cohérentes avec cette expression

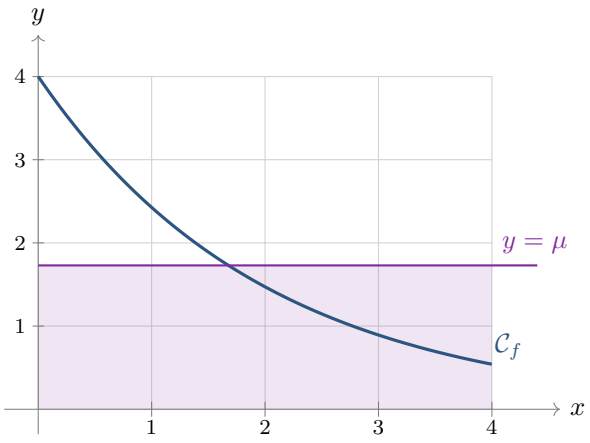
5. On reconnaît la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -\dfrac{x}{2}$, dont la dérivée vaut $-\dfrac{1}{2}$. Il manque donc un facteur $-\dfrac{1}{2}$, que l'on compense par -2 :
$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = -8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F(x) = -8\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$$

On vérifie : $F'(x) = -8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = f(x)$.

6.
$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-8\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4 = -8\mathrm{e}^{-2} + 8 = \boxed{8 - 8\mathrm{e}^{-2} \approx 6{,}92}$$

Cette valeur appartient bien à $[5{,}3\,;8{,}8]$. L'estimation 7,1 obtenue par le milieu de l'encadrement était bonne à 0,2 près : avec seulement quatre rectangles, c'est déjà satisfaisant.

7.
$$\mu = \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8 - 8\mathrm{e}^{-2}}{4} = 2 - 2\mathrm{e}^{-2} \approx \boxed{1{,}73}$$



Le rectangle violet, de base $[0\,;4]$ et de hauteur μ, a exactement la même aire que le domaine situé sous la courbe : c'est le niveau auquel il faudrait « araser » la courbe pour obtenir la même quantité. On voit d'ailleurs que la partie de courbe située au-dessus de la droite, entre 0 et environ 2, compense exactement celle située en dessous après.

EXERCICE 34 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : position relative.

1. $h(x) = x - 1 - \ln(x)$ donne $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, le dénominateur est strictement positif et le numérateur est positif :

$$\boxed{h'(x) \geqslant 0 \text{ sur } [1\,;\mathrm{e}]}$$

2. $h(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0$ et $h(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 1 - 1 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$.

x	1		e
$h'(x)$	$+$		
$h(x)$	0	↗	$\mathrm{e}-2$

3. La fonction h est croissante sur $[1\,;\mathrm{e}]$ et vaut 0 en 1 : elle est donc positive sur tout l'intervalle. Or $h(x) = (x-1) - \ln(x)$:

$$\boxed{\text{Sur } [1\,;\mathrm{e}],\ \mathcal{D} \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}}$$

Les deux courbes se touchent en $x = 1$, au point de coordonnées $(1\,;0)$.

Partie B : calcul de l'aire.

4. On écrit $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$:

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = 1 \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(x)\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \Big[x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = \boxed{1}$$

5.
$$\int_1^{\mathrm{e}} (x-1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^{\mathrm{e}} = \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} + \frac{1}{2} \approx 1{,}476}$$

6. La droite étant au-dessus de la courbe, l'aire est l'intégrale de la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} \Big((x-1) - \ln(x)\Big)\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (x-1)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} + \frac{1}{2}\right) - 1 = \boxed{\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} - \frac{1}{2} \approx 0{,}476 \text{ u.a.}} \end{aligned}$$

Partie C : valeur moyenne.

7.
$$\mu = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0{,}582}$$

8. La fonction ln est continue et strictement croissante sur $[1\,;\mathrm{e}]$, où elle varie de 0 à 1. Comme $0<\mu<1$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique réel c de $[1\,;\mathrm{e}]$ tel que $\ln(c)=\mu$:

$$\boxed{c=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}\approx 1{,}789}$$

$$\boxed{\text{Oui, la valeur moyenne est atteinte, en } c\approx 1{,}79}$$

EXERCICE 35 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

Partie A : étude de f.

1. f est un produit :

$$\begin{cases} u(x)=x+1 \\ u'(x)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(x)=\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x)=-\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x+1)\mathrm{e}^{-x}=(1-x-1)\mathrm{e}^{-x}=\boxed{-x\,\mathrm{e}^{-x}}$$

Sur $[0\,;+\infty[$, on a $-x\leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x}>0$, donc :

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0\,;+\infty[}$$

2. On écrit $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}=0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$$

$$\boxed{\text{La droite d'équation } y=0 \text{ est asymptote horizontale à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty}$$

3. Pour $x\geqslant 0$, on a $x+1\geqslant 1>0$ et $\mathrm{e}^{-x}>0$, donc :

$$\boxed{f(x)>0 \text{ sur } [0\,;+\infty[}$$

Partie B : aire du domaine.

4. F est un produit :

$$\begin{cases} u(x)=-(x+2) \\ u'(x)=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(x)=\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x)=-\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

$$F'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+(x+2)\mathrm{e}^{-x}=(-1+x+2)\mathrm{e}^{-x}=(x+1)\mathrm{e}^{-x}=f(x)$$

$$\boxed{F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } [0\,;+\infty[}$$

5. La fonction f étant positive, l'aire est directement l'intégrale :

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{\lambda}=-(\lambda+2)\mathrm{e}^{-\lambda}-(-2\mathrm{e}^{0})$$

$$\boxed{\mathcal{A}(\lambda)=2-(\lambda+2)\,\mathrm{e}^{-\lambda}}$$

6.

$$\mathcal{A}(1)=2-3\mathrm{e}^{-1}\approx\boxed{0{,}896} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}(5)=2-7\mathrm{e}^{-5}\approx\boxed{1{,}953}$$

7. Par croissances comparées, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}=0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}2\mathrm{e}^{-\lambda}=0$, donc :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=2}$$

Le domaine s'étend indéfiniment vers la droite, mais la courbe s'écrase si vite sur l'axe des abscisses que l'aire ajoutée devient négligeable :

$$\boxed{\text{L'aire totale reste finie et ne dépassera jamais 2 unités d'aire}}$$

8. La fonction $\mathcal{A}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$, et f y est strictement positive : $\mathcal{A}$ est donc strictement croissante. Elle est de plus continue (car dérivable), avec :

$$\mathcal{A}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 2$$

Comme 1 appartient à $]0\,;2[$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction continue et strictement croissante assure :

$$\boxed{\text{L'équation } \mathcal{A}(\lambda) = 1 \text{ admet une unique solution } \lambda_0}$$

À la calculatrice, $\mathcal{A}(1{,}14) \approx 0{,}9958$ et $\mathcal{A}(1{,}15) \approx 1{,}0026$, d'où :

$$\boxed{1{,}14 < \lambda_0 < 1{,}15}$$

9. λ_0 est l'abscisse à laquelle le domaine a atteint la moitié de son aire totale :

$$\boxed{\text{Sur } [0\,;\lambda_0],\ \text{on a déjà accumulé la moitié de l'aire totale}}$$

Il est frappant que cette moitié soit atteinte avant $x = 1{,}15$, alors que le domaine s'étend jusqu'à l'infini : c'est bien le début de la courbe qui concentre l'essentiel de l'aire.

EXERCICE 36 : APPROCHER UNE AIRE PAR DEUX SUITES ADJACENTES ⋆⋆⋆

1. Sur $[1\,;2]$, la fonction $x \mapsto x$ est croissante et strictement positive, donc son inverse est décroissant : $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [1\,;2]}$.
Sur un intervalle où f décroît, la plus petite valeur est atteinte à droite :

$$\boxed{\text{la hauteur d'un rectangle inférieur se lit au bord } \textbf{droit}}$$

et celle d'un rectangle supérieur au bord gauche.

2. Les points de subdivision sont $x_k = 1 + \dfrac{k}{n}$ pour k allant de 0 à n, et chaque rectangle a pour largeur $\dfrac{1}{n}$. Pour les rectangles inférieurs, on prend les hauteurs $f(x_k)$ pour k allant de 1 à n :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}}$$

Pour les rectangles supérieurs, ce sont les hauteurs $f(x_k)$ pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\boxed{v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}}$$

3. Pour $n = 4$:

$$u_4 = \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} = \boxed{\frac{533}{840} \approx 0{,}635}$$

$$v_4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} = \boxed{\frac{319}{420} \approx 0{,}760}$$

4. Les deux sommes contiennent les mêmes termes $\dfrac{1}{n+1}, \ldots, \dfrac{1}{2n-1}$. La première y ajoute $\dfrac{1}{2n}$, la seconde $\dfrac{1}{n}$. Donc :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{2}{2n} - \frac{1}{2n} = \boxed{\frac{1}{2n}}$$

On retrouve la formule générale $\dfrac{b-a}{n}\left(f(a)-f(b)\right) = \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$.

5. En écrivant $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n+2}$, on constate que u_{n+1} perd le terme $\dfrac{1}{n+1}$ et gagne les termes $\dfrac{1}{2n+1}$ et $\dfrac{1}{2n+2}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \boxed{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}$$

Or $2n+1 < 2n+2$, donc $\dfrac{1}{2n+1} > \dfrac{1}{2n+2}$ et cette différence est strictement positive :

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$$

6. D'après la question 4, $v_n = u_n + \dfrac{1}{2n}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Or $2n < 2n+1$, donc cette différence est strictement négative :

$$\boxed{(v_n) \text{ est strictement décroissante}}$$

7. (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$:

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$$

Elles convergent donc vers une limite commune ℓ. Or pour tout n, $u_n \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant v_n$, et cette intégrale vaut :

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x)\Big]_1^2 = \ln(2)$$

Le théorème des gendarmes donne alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(2) \approx 0{,}693}$$

8. On cherche le plus petit n tel que $\dfrac{1}{2n} < 10^{-3}$, soit $2n > 1000$, soit $n > 500$:

$$\boxed{n = 501 \text{ rectangles}}$$

On notera que $u_4 \approx 0{,}635$ et $v_4 \approx 0{,}760$ encadrent bien $\ln(2) \approx 0{,}693$, mais qu'il faut plus de cinq cents rectangles pour en obtenir trois décimales : la convergence est lente.

EXERCICE 37 : ENCADREMENT DE LA SÉRIE HARMONIQUE ⋆⋆⋆

1.

$$\boxed{H_1 = 1 \quad ; \quad H_2 = \frac{3}{2} \quad ; \quad H_3 = \frac{11}{6} \quad ; \quad H_4 = \frac{25}{12}}$$

2. Soit $t \in [k\,;k+1]$. Comme $0 < k \leqslant t \leqslant k+1$, le passage à l'inverse renverse les inégalités :

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}}$$

3. On intègre cet encadrement sur $[k\,;k+1]$, intervalle de longueur 1, en utilisant l'inégalité de la moyenne :

$$\frac{1}{k+1}\times 1 \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}\times 1$$

Or $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\Big]_k^{k+1} = \ln(k+1)-\ln(k)$, d'où :

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k}}$$

4. On somme l'inégalité de droite pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+1)-\ln(k)\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n$$

La somme de gauche est télescopique : tous les termes se simplifient deux à deux, ne laissant que le dernier moins le premier.

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+1)-\ln(k)\Big) = \ln(n+1)-\ln(1) = \ln(n+1)$$

$$\boxed{\ln(n+1) \leqslant H_n}$$

5. On somme cette fois l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\ln(k+1)-\ln(k)\Big) = \ln(n)$$

Or la somme de gauche vaut $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} = H_n - 1$, d'où :

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{H_n \leqslant 1+\ln(n)}$$

6. Pour $n = 100$:

$$\boxed{\ln(101) \leqslant H_{100} \leqslant 1+\ln(100)} \qquad \text{soit} \qquad 4{,}615 \leqslant H_{100} \leqslant 5{,}606$$

(la valeur exacte est $H_{100} \approx 5{,}187$).

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et que $\ln(n+1) \leqslant H_n$, le théorème de comparaison donne :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty}$$

La somme $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ diverge donc, bien que ses termes tendent vers 0.

7. (a) Si $n \geqslant 22\,026$, alors $n+1 \geqslant 22\,027 > \mathrm{e}^{10} \approx 22\,026{,}47$, donc $\ln(n+1) > 10$. Or $H_n \geqslant \ln(n+1)$:

$$\boxed{H_n > 10 \text{ dès que } n \geqslant 22\,026}$$

(b) Si $n \leqslant 8\,103$, alors $\ln(n) \leqslant \ln(8\,103) < 9$ car $\mathrm{e}^9 \approx 8\,103{,}08$. Or $H_n \leqslant 1+\ln(n)$:

$$\boxed{H_n < 10 \text{ tant que } n \leqslant 8\,103}$$

(c) Le premier rang N tel que $H_N > 10$ vérifie donc $8\,103 < N < 22\,026$. L'encadrement est très large : il ne détermine pas N, mais il en donne l'ordre de grandeur. C'est le prix de la simplicité des majorations utilisées.

$$\boxed{8\,104 \leqslant N \leqslant 22\,026 \quad (\text{en réalité } N = 12\,367)}$$

8. Par définition, $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$. Or :

$$H_{2n} - H_n = \left(1 + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\boxed{u_n = H_{2n} - H_n}$$

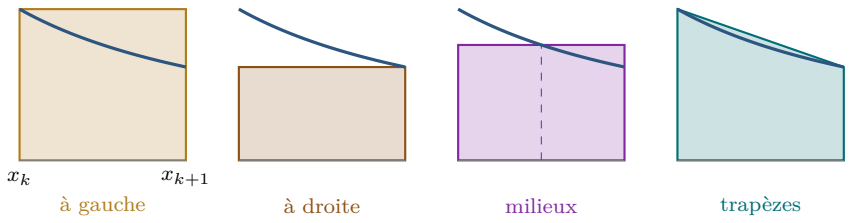
L'exercice 36 ayant établi que (u_n) converge vers $\ln(2)$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n) = \ln(2)}$$

C'est un résultat remarquable : H_n tend vers $+\infty$, mais l'écart entre H_{2n} et H_n, lui, converge. Doubler le nombre de termes n'ajoute asymptotiquement que $\ln(2)$.

EXERCICE 38 : RECTANGLES, MILIEUX ET TRAPÈZES ⋆⋆

1. Sur un intervalle $[x_k\,;x_{k+1}]$, les quatre constructions se comparent ainsi :



On voit déjà que le rectangle de gauche déborde largement, celui de droite manque une bande tout aussi large, alors que le rectangle des milieux et le trapèze épousent la courbe de très près.

2. Les cinq valeurs utiles sont $f(1) = 1$, $f(1{,}25) = 0{,}8$, $f(1{,}5) = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}667$, $f(1{,}75) = \dfrac{4}{7} \approx 0{,}571$ et $f(2) = 0{,}5$. Chaque rectangle ayant pour largeur $h = 0{,}25$:

$$G = 0{,}25 \times \left(1 + 0{,}8 + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) \approx \boxed{0{,}760}$$

$$D = 0{,}25 \times \left(0{,}8 + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + 0{,}5\right) \approx \boxed{0{,}635}$$

3. Les quatre milieux sont $\dfrac{9}{8}$, $\dfrac{11}{8}$, $\dfrac{13}{8}$ et $\dfrac{15}{8}$, en lesquels f vaut respectivement $\dfrac{8}{9}$, $\dfrac{8}{11}$, $\dfrac{8}{13}$ et $\dfrac{8}{15}$.

$$M = 0{,}25 \times \left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right) \approx \boxed{0{,}691}$$

4. Sur $[x_k\,;x_{k+1}]$, le trapèze a pour bases $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$ et pour hauteur h : son aire vaut $\dfrac{(f(x_k) + f(x_{k+1}))h}{2}$, c'est-à-dire la **moyenne** des aires des deux rectangles. En sommant sur les quatre intervalles :

$$\boxed{T = \frac{G + D}{2}}$$

$$T = \frac{0{,}7595 + 0{,}6345}{2} \approx \boxed{0{,}697}$$

5. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x)\Big]_1^2 = \ln(2) \approx 0{,}693147$. Les erreurs commises sont :

Méthode	gauche	droite	trapèzes	milieux
Valeur	0,759524	0,634524	0,697024	0,691220
Erreur	$+6{,}6 \times 10^{-2}$	$-5{,}9 \times 10^{-2}$	$+3{,}9 \times 10^{-3}$	$-1{,}9 \times 10^{-3}$

De la moins précise à la plus précise : gauche, droite, trapèzes, milieux

6. Oui : $M \approx 0{,}6912 < \ln(2) < 0{,}6970 \approx T$, donc $\boxed{M \leqslant I \leqslant T}$. La fonction inverse étant convexe sur $[1\,;2]$, sa courbe est en dessous de chacune de ses cordes — d'où T trop grand — et au-dessus de chacune de ses tangentes — d'où M trop petit.

   Sur la figure de la question 1, le rectangle des milieux a la même aire que le trapèze construit sur la *tangente* au point milieu : la portion de courbe qui dépasse à gauche compense presque exactement celle qui manque à droite.

   La méthode des milieux bénéficie d'une compensation, pas celle des rectangles

   C'est ce qui explique le facteur 30 entre les deux erreurs, pour le même nombre de calculs.

```
7 def milieux(f, a, b, n):
2     h = (b - a) / n
3     S = 0
4     for k in range(n):
5         m = a + (k + 0.5) * h
6         S = S + f(m)
7     return h * S
```

8. L'appel `milieux(g, 1, 2, 4)` reprend exactement le calcul de la question 3 :

   `milieux(g, 1, 2, 4)` $\approx 0{,}691\,220$

   Avec $n = 1\,000$, le découpage est 250 fois plus fin :

   `milieux(g, 1, 2, 1000)` $\approx 0{,}693\,147\,1$

   soit $\ln(2)$ à 3×10^{-8} près.

EXERCICE 39 : LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO ⋆⋆

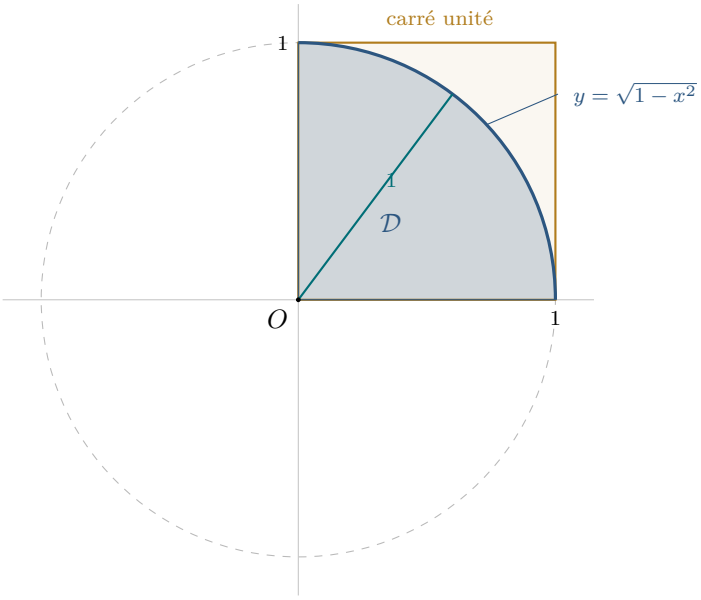
1. Soit $M(x\,;y)$ un point de la courbe, avec $x \in [0\,;1]$. Alors $y = \sqrt{1-x^2}$, donc $y \geqslant 0$ et, en élevant au carré :

   $$y^2 = 1 - x^2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

   La courbe est le quart de cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le premier quadrant

   Le domaine $\mathcal{D}$ situé sous cette courbe est donc un quart de disque de rayon 1, dont l'aire vaut le quart de $\pi \times 1^2$:

   $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$$



Le domaine sous la courbe est bien le quart du disque de rayon 1 : c'est ce que montre le cercle complet tracé en pointillés. Son aire, $\frac{\pi}{4}$, s'obtient donc sans aucune primitive — et c'est heureux, car aucune primitive de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ne figure au tableau du cours.

2. (a) Le carré a pour aire $1 \times 1 = 1$, donc :

$$\boxed{p = \frac{\text{aire de } \mathcal{D}}{\text{aire du carré}} = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785}$$

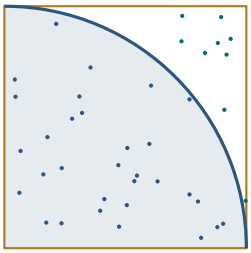
(b) Comme $x \in [0\,;1]$ et $y \geqslant 0$, le point P appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il est sous la courbe, c'est-à-dire $y \leqslant \sqrt{1-x^2}$. Les deux membres étant positifs, on peut élever au carré sans changer le sens :

$$y \leqslant \sqrt{1-x^2} \iff y^2 \leqslant 1 - x^2 \iff \boxed{x^2 + y^2 \leqslant 1}$$

C'est la traduction du fait que P est à une distance de O inférieure à 1.

3. La proportion $\frac{c}{N}$ de points tombés dans $\mathcal{D}$ est la **fréquence** de l'événement « le point est dans $\mathcal{D}$ ». Lorsque N est grand, cette fréquence se rapproche de la probabilité $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{c}{N} \approx \frac{\pi}{4} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\pi \approx \frac{4c}{N}}$$



$N = 40$ tirages : $c = 31$ points bleus, d'où $\pi \approx \frac{4\times 31}{40} = 3{,}1$

4.

$$\boxed{N = 1\,000 \ : \ \pi \approx \frac{4 \times 782}{1\,000} = 3{,}128} \qquad \text{et} \qquad \boxed{N = 10\,000 \ : \ \pi \approx \frac{4 \times 7\,864}{10\,000} = 3{,}1456}$$

La première estimation donne une décimale exacte, la seconde deux. Rappelons que $\pi \approx 3{,}14159$.

```python
from random import random

def approx_pi(N):
    c = 0
    for i in range(N):
        x = random()
        y = random()
        if x**2 + y**2 <= 1 :
            c = c + 1
    return 4 * c / N
```

6. C'est parfaitement normal, et ce n'est **pas** une erreur de programmation :

la fonction repose sur des tirages aléatoires, donc son résultat varie

   Deux exécutions ne tirent pas les mêmes points et ne comptent donc pas le même nombre c. C'est la nature même de la méthode : elle ne fournit pas une valeur, mais une estimation.

7. Le rectangle $[a\,;b] \times [0\,;M]$ a pour aire $(b-a)M$, et le domaine sous la courbe de g y est entièrement contenu puisque $0 \leqslant g \leqslant M$. La probabilité qu'un point tiré au hasard tombe sous la courbe vaut donc :

$$p = \frac{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)M}$$

   En remplaçant p par la fréquence observée $\dfrac{c}{N}$:

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,M\,\frac{c}{N}}$$

8. Non, la méthode est **très peu précise**. Pour gagner une décimale il faut multiplier N par 100, donc effectuer cent fois plus de tirages.

   La comparaison est sans appel : avec 1 000 points, Monte-Carlo donne une ou deux décimales de π, alors que la méthode des milieux de l'exercice 38 en donnait sept avec 1 000 évaluations seulement.

Pour une intégrale en dimension 1, Monte-Carlo n'est pas compétitive

   Son intérêt est ailleurs : en dimension élevée, découper l'espace en petits pavés devient impraticable, alors que tirer des points au hasard reste tout aussi simple.

EXERCICE 40 : L'ALGORITHME DE BROUNCKER POUR $\ln(2)$ ⋆⋆⋆

Partie A : une somme géométrique.

1. C'est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-x$, avec $-x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \boxed{\frac{1-(-x)^n}{1+x}}$$

2. En multipliant l'égalité précédente par $1+x$ puis en isolant $\dfrac{1}{1+x}$:

$$(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = 1-(-x)^n = 1-(-1)^n x^n$$

En divisant par $1+x$ et en réarrangeant :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}}$$

Partie B : intégration.

3. Avec $u(x) = 1+x > 0$ sur $[0\,;1]$ et $u'(x) = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \boxed{\ln(2)}$$

4. On intègre chaque membre de l'égalité de la question 2 sur $[0\,;1]$. Le membre de gauche donne $\ln(2)$. Pour le membre de droite, la linéarité permet d'intégrer terme à terme :

$$\int_0^1 (-1)^{k-1}x^{k-1}\,\mathrm{d}x = (-1)^{k-1}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1 = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

En sommant pour k allant de 1 à n, il vient S_n, auquel s'ajoute l'intégrale du dernier terme, soit $(-1)^n R_n$:

$$\boxed{\ln(2) = S_n + (-1)^n R_n}$$

5. Soit $x \in [0\,;1]$. Alors $x^n \geqslant 0$ et $1+x \geqslant 1 > 0$, donc le quotient est positif. De plus $1+x \geqslant 1$ entraîne $\dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$, d'où en multipliant par $x^n \geqslant 0$:

$$\boxed{0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n}$$

On intègre alors sur $[0\,;1]$, les bornes étant dans le bon ordre :

$$0 \leqslant R_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\boxed{0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

6. D'après la question 4, $\ln(2) - S_n = (-1)^n R_n$, donc $|\ln(2) - S_n| = R_n$ puisque $|(-1)^n| = 1$ et $R_n \geqslant 0$:

$$\boxed{|\ln(2) - S_n| \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Le théorème des gendarmes appliqué à $|\ln(2) - S_n|$ donne alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}$$

Partie C : la forme de Brouncker.

7. On regroupe les $2m$ termes de S_{2m} par paires consécutives, le premier de chaque paire étant positif :

$$S_{2m} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) = \sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j+2}\right)$$

Or, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j+2} = \frac{(2j+2)-(2j+1)}{(2j+1)(2j+2)} = \frac{1}{(2j+1)(2j+2)}$$

$$\boxed{S_{2m} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(2j+1)(2j+2)}}$$

8.

$$S_2 = \frac{1}{1\times 2} = \boxed{\frac{1}{2} = 0{,}500}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{7}{12} \approx 0{,}583}$$

$$S_6 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5\times 6} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} = \boxed{\frac{37}{60} \approx 0{,}617}$$

Ces trois valeurs progressent bien vers $\ln(2) \approx 0{,}693$, mais lentement : après six termes, la première décimale n'est même pas fixée.

9. Il suffit que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 10^{-3}$, soit $n+1 \geqslant 1\,000$:

$$\boxed{n = 999 \text{ termes}}$$

$$\boxed{\text{L'algorithme est très peu efficace}}$$

Mille termes pour trois décimales : c'est bien moins performant que la méthode des milieux de l'exercice 38, qui en donnait sept avec mille évaluations. Ce n'est pas ainsi qu'on calcule $\ln(2)$ aujourd'hui — mais au XVII$^{\text{e}}$ siècle, disposer d'une formule exacte était déjà une conquête.

10.
```
def brouncker(e):
    S = 0
    n = 0
    while 1 / (n + 1) > e :
        n = n + 1
        S = S + (-1)**(n - 1) / n
    return n, S
```

11. D'après la question 9, la boucle s'arrête au premier n tel que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 10^{-3}$:

$$\boxed{\texttt{brouncker(0.001)} \text{ renvoie } n = 999 \text{ et } S \approx 0{,}693\,647}$$

L'écart réel avec $\ln(2) \approx 0{,}693\,147$ vaut environ 5×10^{-4} : il est bien inférieur à la majoration 10^{-3}, qui reste donc prudente.

12. Par définition de S_{2n}, et d'après la question 7 ou par le calcul direct :

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}$$

On y ajoute et retranche les termes de rang pair pour reconstituer H_{2n} :

$$S_{2n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)}_{=H_{2n}} - 2\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)}_{=\frac{1}{2}H_n}$$

car $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}H_n$. Donc :

$$S_{2n}=H_{2n}-2\times\frac{1}{2}H_n=\boxed{H_{2n}-H_n}$$

Or l'exercice 37 a établi que $u_n=H_{2n}-H_n$, où (u_n) est la suite des sommes de Riemann inférieures de $\frac{1}{x}$ sur $[1\,;2]$ construite à l'exercice 36. Les trois exercices décrivent donc **le même nombre** :

$$\boxed{u_n=H_{2n}-H_n=S_{2n}\qquad\text{et}\qquad\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln(2)}$$

Les rectangles sous l'hyperbole, l'écart entre deux sommes harmoniques et la série de Brouncker ne sont que trois écritures d'une seule et même quantité. On le vérifie sur un exemple : $u_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60}$, qui est bien la valeur de S_6 calculée à la question 8.

Pour aller plus loin

EXERCICE 41 ⋆⋆

Soit $x\geqslant 1$. Sur l'intervalle $[1\,;x]$, on a $f(t)\geqslant\frac{1}{t}$, et les bornes sont dans le bon ordre : l'intégration conserve l'inégalité, donc

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_1^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln(x)$$

Comme $\ln(x)\to+\infty$ quand $x\to+\infty$, le théorème de comparaison donne :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty}$$

Remarque. L'hypothèse $f(t)\geqslant\frac{1}{t}$ ne peut pas être affaiblie en $f(t)\geqslant\frac{1}{t^2}$: on a $\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=1-\frac{1}{x}$, qui tend vers 1. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ est à la frontière entre les domaines infinis d'aire infinie et ceux d'aire finie, comme celui de l'exercice 35 ; l'exercice 48 précisera cette frontière pour les sommes.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

1. Pour $t\in[0\,;1]$, on a $f(t)\geqslant 0$ et $t^n\geqslant 0$: la fonction intégrée est positive, et les bornes sont dans le bon ordre.

$$\boxed{I_n\geqslant 0}$$

Par linéarité, $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,t^n(t-1)\,\mathrm{d}t$. Sur $[0\,;1]$, $f(t)\,t^n\geqslant 0$ et $t-1\leqslant 0$: cette intégrale est négative.

$$\boxed{\text{La suite }(I_n)\text{ est décroissante.}}$$

2. Pour $t\in[0\,;1]$, on a $t^n\geqslant 0$, donc, en multipliant l'encadrement $-M\leqslant f(t)\leqslant M$ par t^n :

$$-M\,t^n\leqslant f(t)\,t^n\leqslant M\,t^n$$

En intégrant sur $[0\,;1]$, et puisque $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$:

$$-\frac{M}{n+1}\leqslant I_n\leqslant\frac{M}{n+1}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{|I_n|\leqslant\frac{M}{n+1}}$$

Les deux bornes tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0}$.

Remarque. C'est la généralisation de l'exercice 29, où $f(t) = \mathrm{e}^t$ et $M = \mathrm{e}$. L'erreur la plus répandue est de raisonner ainsi : « t^n tend vers 0, donc l'intégrale tend vers 0 ». Ce n'est pas une preuve, et d'ailleurs t^n ne tend pas vers 0 en $t = 1$: on ne peut pas faire entrer une limite sous le signe intégrale sans justification, et c'est l'encadrement qui la fournit.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Notons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le cours, F est la primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule en 0 : elle est dérivable, de dérivée f.

1. Sur $]0\,;+\infty[$, $G(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, donc G est dérivable et

$$G'(x) = \frac{x\,f(x) - F(x)}{x^2} = \boxed{\frac{f(x) - G(x)}{x}}$$

2. Pour $x > 0$, comme $F(0) = 0$:

$$G(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

C'est le taux d'accroissement de F entre 0 et x. La fonction F étant dérivable en 0, il tend vers $F'(0) = f(0) = G(0)$ quand x tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} G(x) = G(0) : G \text{ est continue en } 0.}$$

Interprétation. Pour $x > 0$, $G(x)$ est la valeur moyenne de f sur $[0\,;x]$ (exercice 25). La question 2 dit que la moyenne de f sur un intervalle de plus en plus court tend vers la valeur de f au point de départ, ce qui justifie la définition $G(0) = f(0)$.

Remarque. La formule de la question 1 a une conséquence parlante. Si f est croissante, alors $f(t) \leqslant f(x)$ pour $t \in [0\,;x]$, donc la moyenne $G(x)$ est inférieure à $f(x)$, et $G'(x) \geqslant 0$: la moyenne d'une fonction croissante sur $[0\,;x]$ croît avec x, ce que l'intuition suggérait.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. Avec $G(x) = F\left(v(x)\right) - F\left(u(x)\right)$, la dérivée d'une fonction composée et $F' = f$ donnent :

$$\boxed{G'(x) = v'(x)\,f\left(v(x)\right) - u'(x)\,f\left(u(x)\right)}$$

2. Posons $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$, continue sur $I =]0\,;+\infty[$, et, pour $x > 0$, $u(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = x$, qui sont dérivables et à valeurs dans I. Notons $G(x) = \displaystyle\int_{1/x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après la question 1, avec $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$:

$$G'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{-\ln(x)}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2+1} = 0$$

La fonction G, de dérivée nulle sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, est constante. Or $G(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \quad \int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Remarque. Aucune primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ ne s'exprime à l'aide des fonctions connues au lycée, et pourtant on a calculé ces intégrales : dériver par rapport à une borne permet de contourner le calcul de primitive. On peut aussi deviner le résultat : les aires situées sous l'axe, entre $\frac{1}{x}$ et 1, et au-dessus, entre 1 et x, se compensent exactement. Le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$, étudié après le baccalauréat, en donne la raison.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Notons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$. Alors

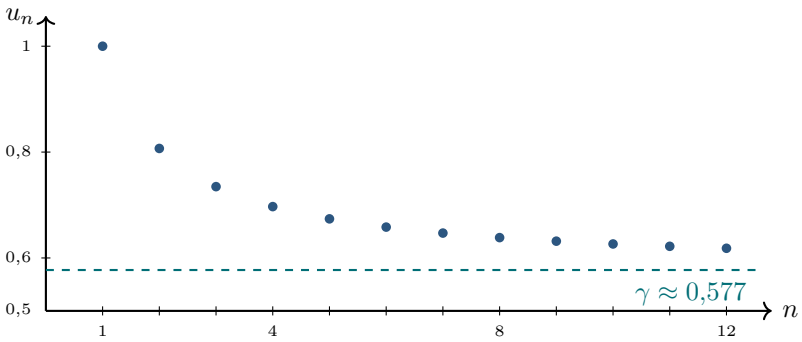
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n))$$

D'après la question 3 de l'exercice 37 appliquée à $k = n$, on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

Par ailleurs, la question 4 de l'exercice 37 donne $H_n \geqslant \ln(n+1) > \ln(n)$, donc $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

La suite $(H_n - \ln(n))$ converge, vers une limite comprise entre 0 et $u_1 = 1$.



Sur cette figure, dont l'axe vertical commence à 0,5, on voit les termes u_1 à u_{12} décroître de plus en plus lentement vers leur limite, tracée en pointillés.

Cette limite s'appelle la *constante d'Euler* et se note γ ; elle vaut environ 0,577 2. On ne sait toujours pas si elle est rationnelle.

Remarque. Le résultat se lit $H_n \approx \ln(n) + \gamma$ pour n grand, ce qui est bien plus précis que l'encadrement de l'exercice 37. Pour $n = 100$, on obtient 5,182, pour une valeur exacte $H_{100} \approx 5{,}187$. Pour le rang N à partir duquel $H_N > 10$, cette approximation suggère $\ln(N) > 10 - \gamma$, soit $N > \mathrm{e}^{10-\gamma} \approx 12\,367$: c'est exactement la valeur indiquée dans le corrigé de l'exercice 37, que l'encadrement par $\ln(n+1)$ et $1 + \ln(n)$ ne permettait de situer qu'entre 8 104 et 22 026.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

D'après l'exercice 31 du chapitre 5, la fonction $t \mapsto t^{\alpha+1}$ a pour dérivée $t \mapsto (\alpha+1)\,t^\alpha$ sur $]0\,;+\infty[$: une primitive de $t \mapsto t^\alpha$ est donc $t \mapsto \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. De plus, comme $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante.

Majoration. Pour $k \geqslant 1$ et $t \in [k\,;k+1]$, on a $k^\alpha \leqslant t^\alpha$, et l'intégration sur cet intervalle de longueur 1 donne $k^\alpha \leqslant \int_k^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$. En sommant pour k de 1 à n, les intégrales se mettent bout à bout (relation de Chasles) :

$$S_n \leqslant \int_1^{n+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

Minoration. Pour $k \geqslant 2$ et $t \in [k-1\,;k]$, on a de même $k^\alpha \geqslant \int_{k-1}^{k} t^\alpha \,\mathrm{d}t$, d'où, en sommant pour k de 2 à n et en ajoutant le terme $1^\alpha = 1$:

$$S_n \geqslant 1 + \int_1^{n} t^\alpha \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

Conclusion. En divisant par $n^{\alpha+1} > 0$:

$$\frac{1}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \leqslant \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \leqslant \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}-\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

Comme $\alpha+1>0$, $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \to 0$ (exercice 31 du chapitre 5), et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} = \mathrm{e}^{(\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to \mathrm{e}^0 = 1$. Les deux bornes tendent vers $\frac{1}{\alpha+1}$, et le théorème des gendarmes conclut :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}}$$

Vérification : pour $\alpha=1$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{S_n}{n^2} \to \frac{1}{2}$; pour $\alpha=2$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\frac{S_n}{n^3} \to \frac{1}{3}$, ce qui confirme le résultat sur deux formules classiques, que l'on démontre par récurrence.

Remarque. On peut écrire $\frac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}$: c'est la somme des aires des rectangles supérieurs pour la fonction $t \mapsto t^\alpha$ sur $[0\,;1]$, découpé en n intervalles. Le résultat dit qu'elle tend vers $\int_0^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$, comme la méthode de l'exercice 36 le laissait prévoir.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆⋆

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$. Si $x>0$, les réels x et $2x$ sont dans $]0\,;+\infty[$, et si $x<0$, ils sont dans $]-\infty\,;0[$: dans les deux cas, φ est continue entre les bornes, et $f(x)$ est bien défini.

1. Sur chacun des deux intervalles, notons Φ une primitive de φ, de sorte que $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$. Comme à l'exercice 44 :

$$f'(x) = 2\,\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x-1)}{x}$$

Le facteur $\mathrm{e}^x - 1$ a le signe de x : le quotient est strictement positif pour tout $x \neq 0$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty\,;0[\text{ et sur }]0\,;+\infty[.}$$

2. Soit $x>0$. Pour $t \in [x\,;2x]$, on a $\mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}^x$ et $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{2x}$, ces nombres étant positifs, donc $\varphi(t) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2x}$. L'intégration sur $[x\,;2x]$, de longueur x, donne

$$\boxed{f(x) \geqslant x \times \frac{\mathrm{e}^x}{2x} = \frac{\mathrm{e}^x}{2}}$$

d'où, par comparaison, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3. Soit $x<0$. Les bornes x et $2x$ sont alors dans le mauvais ordre ($2x<x$), et l'on écrit

$$f(x) = -\int_{2x}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{2x}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{|t|}\,\mathrm{d}t$$

puisque $-t = |t|$ pour $t<0$. Pour $t \in [2x\,;x]$, on a $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x$ et $|t| \geqslant |x|$, donc $0 < \frac{\mathrm{e}^t}{|t|} \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{|x|}$. En intégrant sur $[2x\,;x]$, de longueur $|x|$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant |x| \times \frac{\mathrm{e}^x}{|x|} = \mathrm{e}^x$$

Comme $\mathrm{e}^x \to 0$ en $-\infty$, le théorème des gendarmes donne $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

4. On écrit $\mathrm{e}^t - 1 = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s$. Si $t \in [0\,;1]$, on a $1 \leqslant \mathrm{e}^s \leqslant \mathrm{e}$ sur $[0\,;t]$, donc $0 \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant \mathrm{e}\,t$. Si $t \in [-1\,;0]$, on a $\mathrm{e}^s \leqslant 1$ sur $[t\,;0]$, donc $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^t = \int_t^0 \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s \leqslant |t|$. Dans tous les cas :

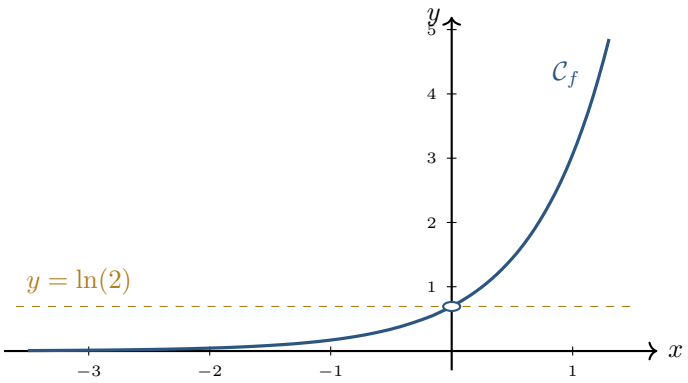
$$\boxed{\text{pour tout } t \in [-1\,;1], \quad \left|\mathrm{e}^t - 1\right| \leqslant \mathrm{e}\,|t| \text{ : la constante } C = \mathrm{e} \text{ convient.}}$$

5. On sépare $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$. La première partie s'intègre : pour $x > 0$, $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$; pour $x < 0$, la fonction $t \mapsto \ln(-t)$, de dérivée $\frac{1}{t}$, est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]-\infty\,;0[$, et l'on obtient de même $\ln(-2x) - \ln(-x) = \ln(2)$. Ainsi

$$f(x) = \ln(2) + R(x) \qquad \text{avec} \qquad R(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Si $0 < |x| \leqslant \frac{1}{2}$, tout t compris entre x et $2x$ vérifie $|t| \leqslant 1$, et la question 4 donne $-\mathrm{e} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} \leqslant \mathrm{e}$. En intégrant sur l'intervalle d'extrémités x et $2x$, de longueur $|x|$, on obtient $|R(x)| \leqslant \mathrm{e}\,|x|$, qui tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = \ln(2)}$$



La courbe, tracée à partir de valeurs calculées numériquement, montre les deux branches croissantes, la limite nulle en $-\infty$ et la croissance rapide en $+\infty$. Elle montre surtout que les deux branches se raccordent au point de coordonnées $(0\,;\ln 2)$, marqué d'un cercle vide car f n'est pas définie en 0.

Remarque. Le résultat de la question 5 est surprenant : la fonction intégrée devient infinie près de 0, et pourtant l'intégrale sur $[x\,;2x]$ a une limite finie. C'est que l'intervalle rétrécit en même temps, et que la partie $\frac{1}{t}$, responsable de l'explosion, a sur $[x\,;2x]$ une intégrale qui ne dépend pas de x. Le découpage $\varphi = \frac{1}{t} + \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$ isole précisément cette partie.

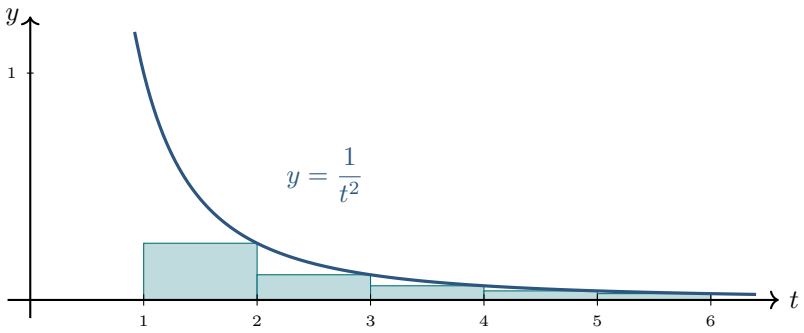
EXERCICE 48 ⋆⋆⋆⋆

D'après l'exercice 31 du chapitre 5, $\frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}$ et, pour $\alpha \neq 1$, une primitive de $t \mapsto t^{-\alpha}$ sur $]0\,;+\infty[$ est $t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Comme $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

1. Pour $k \geqslant 2$ et $t \in [k-1\,;k]$, on a $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$; l'intégration sur cet intervalle de longueur 1 donne $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. En sommant pour k de 2 à n :

$$S_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leqslant \frac{1}{\alpha - 1}$$

car $n^{1-\alpha} > 0$ et $\alpha - 1 > 0$. Ainsi $S_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1} = \boxed{\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}}$.



Pour $\alpha = 2$, cette figure montre les rectangles d'aires $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, …, $\frac{1}{6^2}$ placés sous la courbe : leur aire totale $S_6 - 1$ est inférieure à l'aire sous la courbe entre 1 et 6, elle-même inférieure à 1.

2. On a $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$: la suite (S_n) est croissante. Elle est majorée par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$: d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}$.
Pour la minoration, on utilise cette fois les rectangles supérieurs : pour $k \geqslant 1$ et $t \in [k\,;k+1]$, $\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{t^\alpha}$, d'où, en sommant pour k de 1 à n :
$$S_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1-(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$
Comme $1-\alpha < 0$, $(n+1)^{1-\alpha} \to 0$, et le passage à la limite dans l'inégalité donne $\ell \geqslant \frac{1}{\alpha-1}$.
$$\boxed{(S_n) \text{ converge, et sa limite appartient à } \left[\frac{1}{\alpha-1}\,;\frac{\alpha}{\alpha-1}\right].}$$
Exemple. Pour $\alpha = 2$, la limite est comprise entre 1 et 2. Euler a démontré au XVIII$^{\text{e}}$ siècle qu'elle vaut exactement $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$, un résultat célèbre et inattendu.

3. Si $0 < \alpha \leqslant 1$ et $k \geqslant 1$, alors $\alpha \ln(k) \leqslant \ln(k)$ car $\ln(k) \geqslant 0$, donc $k^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(k)} \leqslant k$ et $\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}$. En sommant, $S_n \geqslant H_n$, et $H_n \to +\infty$ d'après l'exercice 37.
$$\boxed{\text{Si } 0 < \alpha \leqslant 1, \text{ la suite } (S_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

Remarque. La valeur $\alpha = 1$ est la frontière : la somme des $\frac{1}{k}$ devient infinie, celle des $\frac{1}{k^{1{,}01}}$ reste inférieure à 101. C'est exactement la frontière observée pour les intégrales à l'exercice 41, et ce n'est pas un hasard : la comparaison entre somme et intégrale, utilisée tout au long de l'exercice, montre que la somme et l'intégrale ont le même comportement.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆⋆

Notons $A = \int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t$, $B = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et $C = \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t$. En développant le carré et par linéarité de l'intégrale, pour tout réel x :
$$S(x) = \int_a^b \Big(f(t)^2 + 2x\,f(t)\,g(t) + x^2 g(t)^2\Big)\,\mathrm{d}t = A\,x^2 + 2B\,x + C$$
La fonction S est donc polynomiale de degré au plus 2. Elle est à valeurs positives, comme intégrale, sur $[a\,;b]$ avec $a < b$, d'une fonction positive.

Cas $A > 0$. Un trinôme de coefficient dominant positif qui ne prend que des valeurs positives ne peut pas avoir deux racines distinctes, sans quoi il serait négatif entre elles. Son discriminant est donc négatif ou nul :
$$4B^2 - 4AC \leqslant 0 \iff B^2 \leqslant AC \iff |B| \leqslant \sqrt{A}\sqrt{C}$$
Cas $A = 0$. Alors $S(x) = 2Bx + C$. Une fonction affine qui ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$ est constante, donc $B = 0$, et l'inégalité $B \leqslant \sqrt{A}\sqrt{C} = 0$ est vraie.

Dans les deux cas, $B \leqslant |B| \leqslant \sqrt{A}\sqrt{C}$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}}$$

Vérification : avec $f(t) = 1$ et $g(t) = t$ sur $[0\,;1]$, le membre de gauche vaut $\frac{1}{2}$ et celui de droite $\sqrt{1} \times \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$.

Remarque. C'est mot pour mot la démonstration de l'exercice 35 du chapitre 4, pour les vecteurs de l'espace : l'intégrale $\int_a^b f\,g$ se comporte comme un produit scalaire entre les fonctions f et g, et $\sqrt{\int_a^b f^2}$ comme une norme. Cette analogie entre fonctions et vecteurs est l'une des idées directrices des mathématiques après le baccalauréat.

Une conséquence. Avec $g = 1$, on obtient $\left(\int_a^b f\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2$: le carré de la valeur moyenne de f est inférieur à la valeur moyenne de f^2.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆⋆

1. Si $x \leqslant y$, la croissance de f et de g donne $f(y) - f(x) \geqslant 0$ et $g(y) - g(x) \geqslant 0$; si $x \geqslant y$, ces deux nombres sont négatifs. Dans les deux cas, ils ont le même signe :

$$\boxed{(f(y) - f(x))\,(g(y) - g(x)) \geqslant 0}$$

2. Notons $I = \displaystyle\int_0^1 f$, $J = \int_0^1 g$ et $K = \int_0^1 fg$. Fixons $y \in [0\,;1]$ et intégrons l'inégalité de la question 1 par rapport à x sur $[0\,;1]$. En développant, et puisque $f(y)$ et $g(y)$ ne dépendent pas de x :

$$\int_0^1 (f(y) - f(x))\,(g(y) - g(x))\,\mathrm{d}x = f(y)g(y) - f(y)\,J - g(y)\,I + K \geqslant 0$$

Cette inégalité est vraie pour tout $y \in [0\,;1]$, et son membre de gauche est une fonction continue de y. On l'intègre maintenant par rapport à y sur $[0\,;1]$:

$$K - I\,J - J\,I + K \geqslant 0 \iff 2K \geqslant 2IJ$$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t}$$

Vérification : avec $f(t) = g(t) = t$, on trouve $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3}$.

3. Si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, alors

$$\boxed{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n}}$$

La démonstration est la même : on somme les n^2 produits $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$, tous positifs, puis on développe, ce qui donne $2n\sum a_i b_i - 2\sum a_i \sum b_i \geqslant 0$. Par exemple, avec $a = b = (1\,;2\,;3)$, on obtient $2 \times 2 = 4 \leqslant \frac{14}{3}$.

Remarque. L'inégalité dit que, lorsque deux grandeurs varient dans le même sens, la moyenne de leur produit dépasse le produit de leurs moyennes. Si l'une est croissante et l'autre décroissante, le même raisonnement donne l'inégalité contraire. En probabilités, après le baccalauréat, on retrouvera cette idée sous le nom de covariance.