EXERCICES – CHAPITRE 6

CALCUL INTÉGRAL

Primitives d'une fonction

EXERCICE 1 ⋆

Dans chaque cas, vérifier si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué. *L'une des six affirmations est fausse : on la corrigera.*

1. $F(x) = x^3 - 2x + 1$ et $f(x) = 3x^2 - 2$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $F(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^x$ et $f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $F(x) = x\ln(x) - x$ et $f(x) = \ln(x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
4. $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $F(x) = \ln\left(x^2+3\right)$ et $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$ sur $I = \mathbb{R}$.
6. $F(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ sur $I =]-1\,;+\infty[$.

EXERCICE 2 ⋆

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$

b) $f(x) = 5$

c) $f(x) = x^5 - \dfrac{x^2}{3} + 2$

d) $f(x) = (2x - 3)(x + 1)$

e) $f(x) = (x - 1)^2$

f) $f(x) = x\left(3x^2 - 4\right)$

Pour d), e) et f), on commencera par développer : le tableau des primitives ne s'applique qu'à une somme de termes de la forme x^n.

EXERCICE 3 ⋆

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur $]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = 3\mathrm{e}^x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 5x$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

EXERCICE 4 ⋆⋆

Chacune des fonctions suivantes est de la forme $u'\,u^n$, éventuellement à un facteur constant près. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 2x\left(x^2+1\right)^3$

b) $f(x) = (2x+3)\left(x^2+3x\right)^5$

c) $f(x) = 3(3x-1)^4$

d) $f(x) = x\left(x^2-4\right)^2$

e) $f(x) = (4x-1)^3$

f) $f(x) = (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^2$

EXERCICE 5 ⋆⋆

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur un intervalle où elle est définie que l'on précisera. On reconnaîtra une forme $\dfrac{u'}{u^2}$ ou $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{(3x-5)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

f) $f(x) = \dfrac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Même consigne, en reconnaissant cette fois une forme $u'\,\mathrm{e}^u$ ou $\dfrac{u'}{u}$.

a) $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

f) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$

g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$

h) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Pour d), on justifiera au préalable que le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Cette fois la forme n'est pas annoncée : à chacun de la reconnaître. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle que l'on précisera.

a) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-4x+7}$

b) $f(x) = 4x^3\,\mathrm{e}^{x^4}$

c) $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^3}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{\left(x^3+2x+1\right)^2}$

e) $f(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3$

f) $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

h) $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{3x^2+2}}$

i) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$

j) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

EXERCICE 8 ⋆

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f sur I vérifiant la condition indiquée.

1. $f(x) = 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(1) = 4$.
2. $f(x) = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = -2$.
3. $f(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = 3$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(1) = 0$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(\mathrm{e}) = 1$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$, avec $F(4) = 5$.

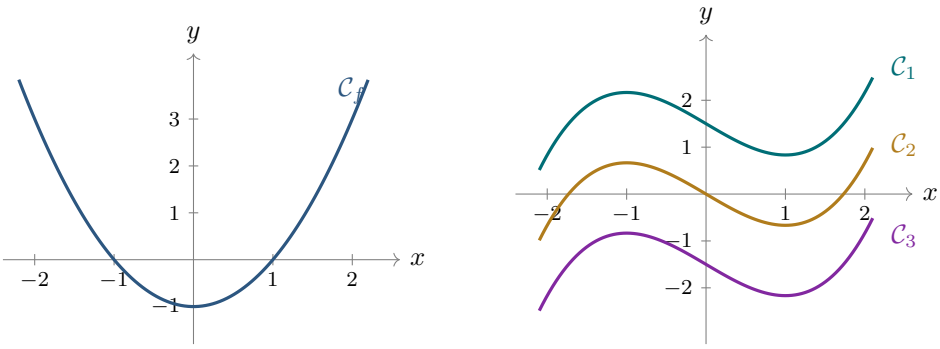
EXERCICE 9 ⋆⋆

Même consigne, avec des formes composées.

1. $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = 1$.
2. $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = \ln(2)$.
3. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = 0$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = 5$.
5. $f(x) = 3(3x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = 2$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

On a représenté ci-dessous, dans deux repères distincts, la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (à gauche), puis trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ (à droite).



1. Justifier que les trois courbes de droite peuvent représenter trois primitives d'une même fonction.
2. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x, puis vérifier que les variations lues à droite sont cohérentes avec ce signe.
3. Ces trois courbes sont celles de primitives de f. Laquelle correspond à la primitive F vérifiant $F(0) = 0$? En notant F cette primitive, exprimer les fonctions représentées par les deux autres courbes en fonction de F.
4. On admet que $f(x) = x^2 - 1$. Déterminer par le calcul l'expression de F, puis vérifier la cohérence avec la lecture graphique en calculant $F(1)$ et $F(-1)$.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

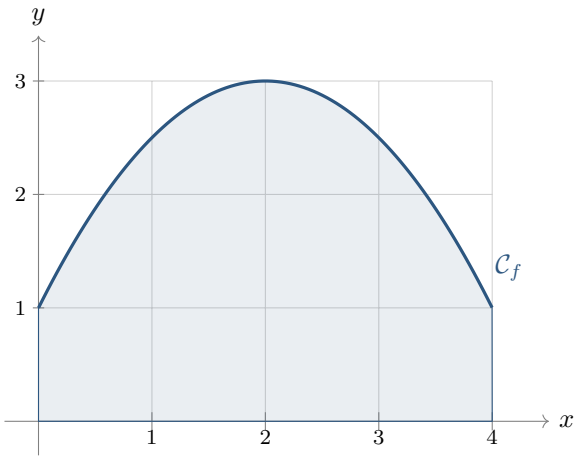
EXERCICE 11 ⋆⋆

On cherche à encadrer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine situé sous la courbe de la fonction carré entre 0 et 1. On découpe pour cela $[0\,;1]$ en $n = 4$ intervalles de même longueur.

1. Faire une figure et y représenter les quatre rectangles inférieurs, puis les quatre rectangles supérieurs.
2. Calculer la somme s_4 des aires des rectangles inférieurs, puis la somme S_4 des aires des rectangles supérieurs. On donnera des valeurs exactes.
3. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.
4. Montrer que, pour un découpage en n intervalles, la différence $S_n - s_n$ vaut $\dfrac{1}{n}$.
   On pourra remarquer que les deux sommes ne diffèrent que par un terme à chaque extrémité.
5. En déduire le nombre minimal d'intervalles nécessaires pour obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à 10^{-2}.
6. On admet que $\mathcal{A} = \dfrac{1}{3}$. Vérifier que l'encadrement de la question 3 est bien cohérent.

EXERCICE 12 ⋆

Ci-dessous est représentée, sur un quadrillage d'unité 1, la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f continue et positive sur $[0\,;4]$.



1. Combien de carreaux entiers sont-ils entièrement contenus dans le domaine colorié ? Combien de carreaux le domaine rencontre-t-il au total ?
2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En évaluant à vue la part des carreaux incomplets, proposer une estimation de cette intégrale.
4. On admet que $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$. Calculer la valeur exacte de l'intégrale, puis la comparer à l'encadrement et à l'estimation précédents.

EXERCICE 13 ⋆

Les intégrales suivantes se calculent sans primitive, en reconnaissant une aire élémentaire. Dans chaque cas, faire une figure et conclure.

a) $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-1}^4 3\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^2 (-x+2)\,\mathrm{d}x$

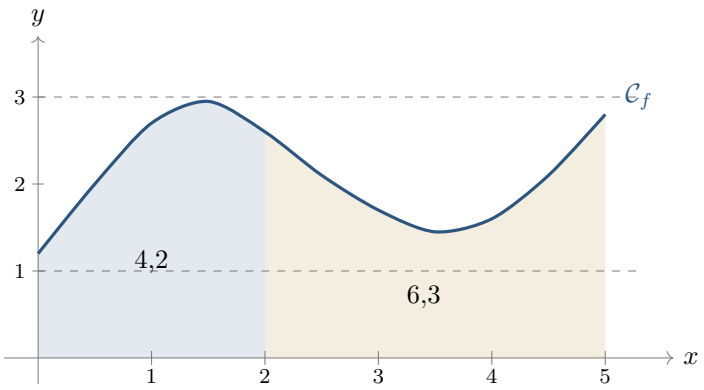
d) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

Pour e), on remarquera que la courbe d'équation $y=\sqrt{4-x^2}$ est un demi-cercle. C'est le seul de ces cinq calculs qu'on ne saurait pas mener avec le tableau des primitives.

EXERCICE 14 ⋆

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f continue et positive sur $[0\,;5]$. On sait que le domaine situé sous la courbe entre 0 et 2 a une aire de 4,2 unités d'aire, et celui situé entre 2 et 5 une aire de 6,3 unités d'aire.



1. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et de $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Quelle propriété a-t-on utilisée ?
3. Que vaut $\displaystyle\int_3^3 f(x)\,\mathrm{d}x$? Justifier sans calcul.
4. Lire sur le graphique deux réels m et M tels que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout x de $[0\,;5]$. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis vérifier qu'il est compatible avec la valeur trouvée à la question 2.
5. Cet encadrement est-il précis ? Proposer un moyen de l'améliorer sans calculer l'intégrale.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. On pose, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\quad \Phi(x) = \displaystyle\int_1^x \left(t^2+1\right)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que Φ est dérivable et déterminer $\Phi'(x)$.
   (b) Que vaut $\Phi(1)$? En déduire les variations de Φ.
   (c) Déterminer l'expression explicite de $\Phi(x)$, puis vérifier les deux réponses précédentes.
2. On pose, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer $G'(x)$ et en déduire les variations de G sur $[0\,;+\infty[$.

(b) On ne sait pas exprimer $G(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. En quoi le théorème fondamental de l'analyse est-il malgré tout utile ici ?

3. On pose, pour tout x de $[0\,;3]$, $\quad H(x) = \displaystyle\int_0^x \left(t^2 - 3t + 2\right) \mathrm{d}t$.

(a) Déterminer $H'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;3]$.

(b) Dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;3]$, en y faisant figurer les valeurs exactes de $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$ et $H(3)$.

EXERCICE 16 ⋆

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^3 (2x - 5) \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^3 + x\right) \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^3 - 2x + 3\right) \mathrm{d}x$

EXERCICE 17 ⋆⋆

Calculer les intégrales suivantes, en reconnaissant au préalable une forme composée.

a) $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^2 \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x+1} \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} \mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Déterminer le réel $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^a (2x+1) \mathrm{d}x = 6$.
2. Déterminer le réel $a > 1$ tel que $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 2$.
3. Déterminer le réel m tel que $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 + m\right) \mathrm{d}x = 2$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer le réel $b > 1$ tel que l'aire du domaine situé sous $\mathcal{C}$ entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = b$ vaille $\dfrac{1}{2}$ unité d'aire.
5. Existe-t-il un réel a tel que $\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$? Si oui, le déterminer.

Propriétés de l'intégrale

EXERCICE 19 ⋆

On donne $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ et $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -3$, où f et g sont deux fonctions continues sur $[0\,;2]$.

1. Calculer, sans connaître f ni g :

   (a) $\displaystyle\int_0^2 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^2 (2f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_0^2 (f(x)+1)\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^2 3f(x)\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^2 (f(x)+4g(x))\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Calculer directement $\displaystyle\int_0^1 (3\mathrm{e}^x - 2x)\,\mathrm{d}x$.

3. Peut-on calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ à partir des données de l'énoncé ? Justifier.

EXERCICE 20 ⋆

1. Soit f continue sur $[0\,;3]$ telle que $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Déterminer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Soit g continue sur $[-2\,;5]$ telle que $\displaystyle\int_{-2}^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$ et $\displaystyle\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Déterminer $\displaystyle\int_{-2}^5 g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$ en découpant l'intervalle en deux.

4. Soit h la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $h(x) = x$ si $x \in [0\,;1]$ et $h(x) = 2-x$ si $x \in]1\,;2]$. Calculer $\displaystyle\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x$, puis retrouver ce résultat par une lecture géométrique.

EXERCICE 21 ⋆

Déterminer le signe de chacune des intégrales suivantes **sans la calculer**, en justifiant.

a) $\displaystyle\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^3\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^2 (1-x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_2^1 x^2\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 - x\right)\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

Deux pièges sont dissimulés dans cette liste : l'un concerne l'ordre des bornes, l'autre une intégrale nulle. À vous de les repérer.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Comparer $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ sans les calculer, puis vérifier par le calcul.
2. Reprendre la question précédente sur l'intervalle $[1\,;2]$. Que constate-t-on ?
3. Démontrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $1 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^x$. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.
4. Démontrer que $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1$, puis vérifier cet encadrement en calculant l'intégrale.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0\,;2]$.
   (a) Justifier que f est décroissante sur $[0\,;2]$ et en déduire un encadrement de $f(x)$.
   (b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
   (c) Calculer cette intégrale et vérifier l'encadrement.
2. Encadrer $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide de l'inégalité de la moyenne sur $[1\,;4]$.
3. On découpe maintenant $[1\,;4]$ en $[1\,;2]$ et $[2\,;4]$, et l'on applique l'inégalité de la moyenne sur chacun de ces deux intervalles.
   (a) Obtenir un nouvel encadrement de $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, à 10^{-2} près.
   (b) Comparer les deux encadrements. Que peut-on en conclure sur l'intérêt du découpage ?
   (c) Calculer la valeur exacte de l'intégrale pour trancher.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Dans chaque cas, déterminer laquelle des deux courbes est au-dessus de l'autre sur l'intervalle indiqué, puis calculer l'aire du domaine compris entre elles.
   (a) $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$ sur $[-1\,;2]$.
   (b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ sur $[0\,;1]$.
   (c) $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = 1$ sur $[0\,;1]$.
2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = 4 - x^2$ et l'axe des abscisses.
3. Soit $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0\,;2]$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2 - 1\right)\mathrm{d}x$.
   (b) Calculer l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses sur $[0\,;2]$.
   (c) Comparer les deux résultats et expliquer la différence.

EXERCICE 25 ⋆

Calculer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = x^2$ sur $[0\,;2]$

b) $f(x) = 2x + 1$ sur $[1\,;4]$

c) $f(x) = \mathrm{e}^x$ sur $[0\,;1]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;4]$

f) $f(x) = x^3$ sur $[-1\,;1]$

Déterminer enfin le réel $a > 0$ tel que la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x$ sur $[0\,;a]$ soit égale à 3.

EXERCICE 26 ⋆⋆

Un mobile démarre à l'instant $t = 0$ et sa vitesse, exprimée en mètres par seconde, est donnée pour $t \in [0\,;10]$ (en secondes) par :

$$v(t) = 20 - 20\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

1. Calculer $v(0)$ et interpréter le résultat dans le contexte.
2. Étudier les variations de v sur $[0\,;10]$ et interpréter.
3. L'axe des abscisses est gradué en secondes et celui des ordonnées en mètres par seconde. En quelle unité s'exprime alors l'aire sous la courbe de v ? Que représente-t-elle ?
4. Calculer la distance parcourue par le mobile pendant les dix premières secondes. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième.
5. En déduire la vitesse moyenne du mobile sur $[0\,;10]$, arrondie au centième.
6. Cette vitesse moyenne est-elle égale à $\dfrac{v(0) + v(10)}{2}$? Commenter.

Intégration par parties

EXERCICE 27 ⋆⋆

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties. On dressera à chaque fois le tableau des quatre fonctions u, u', v et v'.

a) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x$. On écrira $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$.
2. En déduire une primitive de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
4. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Que se passe-t-il, dans la question 4, si l'on choisit $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \ln(x)$? Commenter.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Partie A.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire, à l'aide d'une seconde intégration par parties, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Partie B. On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)\,I_n$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1, I_2 et I_3, et vérifier la cohérence avec la partie A.
4. Justifier que pour tout entier naturel n et tout x de $[0\,;1]$:

$$0 \leqslant x^n\,\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}\,x^n$$

5. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
6. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercices de synthèse

EXERCICE 30 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 3x^2$ est :	$6x$	$x^3 - 4$	$\dfrac{x^3}{3}$
2. $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x$ vaut :	1	2	$\dfrac{1}{2}$
3. Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est :	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{2x^2}$
4. Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont :	F uniquement	$F + k$, $k \in \mathbb{R}$	kF, $k \in \mathbb{R}$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ vaut :	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$\ln(2)$
6. Une primitive de $x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ est :	e^{x^2}	$x^2\mathrm{e}^{x^2}$	$2\mathrm{e}^{x^2}$
7. Si $\displaystyle\int_0^3 f = 5$ et $\displaystyle\int_0^1 f = 2$, alors $\displaystyle\int_1^3 f$ vaut :	7	3	-3
8. Si f est continue sur $[0\,;1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors :	f est nulle sur $[0\,;1]$	f est positive sur $[0\,;1]$	on ne peut rien conclure sur le signe de f
9. La valeur moyenne de $f(x) = x$ sur $[0\,;4]$ est :	2	8	4
10. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ vaut :	e	1	$\mathrm{e} - 1$

EXERCICE 31 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

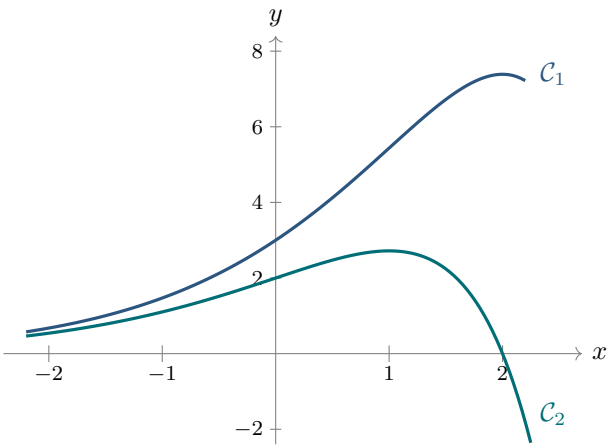
1. Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
2. Une fonction continue sur un intervalle I y admet une unique primitive.
3. Si F et G sont deux primitives d'une même fonction sur I, alors $F - G$ est constante sur I.
4. Si f est positive sur $[a\,;b]$ avec $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
5. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ avec $a < b$, alors f est positive sur $[a\,;b]$.
6. Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

7. Pour toute fonction f continue sur un intervalle contenant a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
8. La valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a\,;b]$ est toujours comprise entre son minimum et son maximum sur cet intervalle.
9. Si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$ avec $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
10. Pour toute fonction f continue sur $[0\,;2]$: $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\,f(1)$.

EXERCICE 32 - TYPE BAC ⋆⋆

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^x$, ainsi qu'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Les deux courbes tracées ci-dessous, notées $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, sont celles de f et de F, dans un ordre que l'on ignore.



Partie A : lecture graphique.

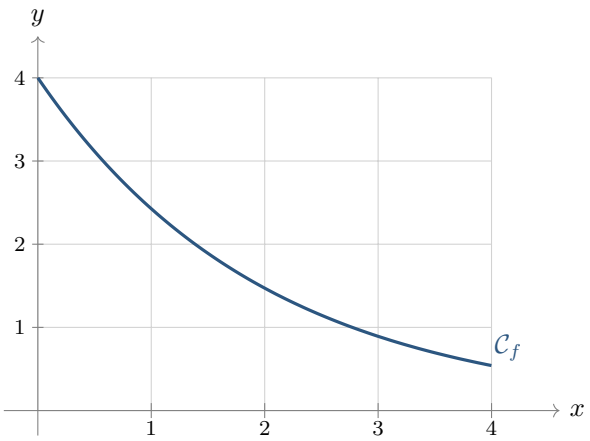
1. Déterminer graphiquement, en justifiant, laquelle des deux courbes est celle de f et laquelle est celle de F.
2. Lire sur le graphique la valeur de $F(0)$ et celle de $f(0)$.
3. Dresser le tableau de signes de f sur $[-2\,;2{,}5]$, puis le tableau de variations de F sur ce même intervalle.

Partie B : calcul.

4. Vérifier que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (3-x)\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Est-ce la seule ?
5. Calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième.
6. Justifier que f est positive sur $[0\,;2]$, et interpréter le résultat précédent en termes d'aire.
7. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;2]$, arrondie au centième. Vérifier la cohérence de ce résultat avec le graphique.

EXERCICE 33 - TYPE BAC ⋆⋆

La courbe ci-dessous, tracée sur un quadrillage d'unité 1, est celle d'une fonction f continue, positive et décroissante sur $[0\,;4]$.



Partie A : lecture graphique.

1. Lire sur le graphique des valeurs approchées de $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. On découpe $[0\,;4]$ en quatre intervalles de longueur 1. En s'appuyant sur la décroissance de f, calculer la somme s_4 des aires des rectangles inférieurs et la somme S_4 des aires des rectangles supérieurs.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis une estimation de cette intégrale.

Partie B : calcul.

On admet désormais que $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

4. Vérifier que les valeurs lues à la question 1 sont cohérentes avec cette expression.
5. Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;4]$.
6. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis une valeur approchée au centième. Comparer avec l'encadrement de la question 3.
7. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;4]$, arrondie au centième. Placer la droite d'équation $y = \mu$ sur le graphique et interpréter.

EXERCICE 34 - TYPE BAC ⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction ln et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x-1$. On s'intéresse au domaine compris entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ pour x variant de 1 à e.

Partie A : position relative.

1. On pose $h(x) = x - 1 - \ln(x)$ pour $x \in [1\,;\mathrm{e}]$. Calculer $h'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de h sur $[1\,;\mathrm{e}]$.
3. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$.

Partie B : calcul de l'aire.

4. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
5. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x-1)\,\mathrm{d}x$.

6. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.

Partie C : valeur moyenne.

7. Calculer la valeur moyenne de la fonction ln sur $[1\,;\mathrm{e}]$.

8. Cette valeur moyenne est-elle atteinte par la fonction ln sur $[1\,;\mathrm{e}]$? Si oui, en quel réel ?

EXERCICE 35 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie A : étude de f.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3. Justifier que f est positive sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B : aire du domaine.

Pour tout réel $\lambda > 0$, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

4. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = -(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

5. Démontrer que $\mathcal{A}(\lambda) = 2 - (\lambda+2)\,\mathrm{e}^{-\lambda}$.

6. Calculer $\mathcal{A}(1)$ et $\mathcal{A}(5)$, arrondies au millième.

7. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Interpréter ce résultat : le domaine s'étend indéfiniment vers la droite, et pourtant son aire reste bornée.

8. Justifier que $\mathcal{A}$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, puis démontrer que l'équation $\mathcal{A}(\lambda) = 1$ admet une unique solution λ_0. En donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} à l'aide de la calculatrice.

9. Interpréter la valeur de λ_0 en termes d'aire.

EXERCICE 36 : APPROCHER UNE AIRE PAR DEUX SUITES ADJACENTES ⋆⋆⋆

On rappelle que deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante, et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. On admet que deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

On considère la fonction f définie sur $[1\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on partage $[1\,;2]$ en n intervalles de même longueur $\dfrac{1}{n}$, et l'on note u_n la somme des aires des rectangles inférieurs et v_n celle des rectangles supérieurs.

1. Justifier que f est décroissante sur $[1\,;2]$. Sur quel bord de chaque petit intervalle la hauteur d'un rectangle inférieur se lit-elle alors ?

2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

3. Calculer les valeurs exactes de u_4 et v_4, puis en donner des valeurs approchées au millième.

4. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n - u_n = \dfrac{1}{2n}$.
On remarquera que les deux sommes ne diffèrent que par un terme à chaque extrémité.

5. Démontrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$, puis en déduire le sens de variation de (u_n).
6. Démontrer de même que (v_n) est décroissante.
7. Conclure que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?
   On calculera $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ *pour l'identifier.*
8. Combien de rectangles faut-il utiliser pour obtenir un encadrement de $\ln(2)$ d'amplitude inférieure à 10^{-3} ?

EXERCICE 37 : ENCADREMENT DE LA SÉRIE HARMONIQUE ⋆⋆⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Calculer les valeurs exactes de H_1, H_2, H_3 et H_4.
2. Soit k un entier naturel non nul. Démontrer que pour tout réel t de $[k\,;k+1]$:
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$
3. En intégrant cet encadrement sur $[k\,;k+1]$, démontrer que :
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$
4. En sommant l'inégalité de droite pour k allant de 1 à n, démontrer que $\ln(n+1) \leqslant H_n$.
   On remarquera que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$ *se télescope.*
5. En sommant l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à $n-1$, démontrer que $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$ pour tout $n \geqslant 2$.
6. En déduire un encadrement de H_{100}, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$.
7. On cherche à partir de quel rang H_n dépasse 10.
   (a) Démontrer que $H_n > 10$ dès que $n \geqslant 22\,026$.
   (b) Démontrer que $H_n \leqslant 10$ tant que $n \leqslant 8\,103$.
   (c) Que peut-on en conclure ? Commenter la largeur de l'intervalle obtenu.
8. Démontrer que la suite (u_n) de l'exercice 36 vérifie $u_n = H_{2n} - H_n$. En déduire, sans nouveau calcul, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n)$.

EXERCICE 38 : RECTANGLES, MILIEUX ET TRAPÈZES ⋆⋆

On cherche à approcher $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ en partageant $[1\,;2]$ en $n = 4$ intervalles de même longueur $h = 0{,}25$. On note $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}25$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}75$ et $x_4 = 2$.

Quatre méthodes sont envisagées. Sur chaque petit intervalle $[x_k\,;x_{k+1}]$, on remplace le domaine sous la courbe par :

- un rectangle de hauteur $f(x_k)$ (méthode des rectangles **à gauche**) ;
- un rectangle de hauteur $f(x_{k+1})$ (méthode des rectangles **à droite**) ;
- un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ (méthode des **milieux**) ;

- un trapèze de bases $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$ (méthode des **trapèzes**).

1. Faire un schéma illustrant chacune des quatre méthodes sur un seul intervalle.
2. Calculer les approximations G (rectangles à gauche) et D (rectangles à droite) de I. On donnera des valeurs approchées au millième.
3. Calculer l'approximation M par la méthode des milieux. On donnera d'abord les valeurs exactes de f aux quatre milieux.
4. Démontrer que l'approximation T par la méthode des trapèzes vérifie $T = \dfrac{G+D}{2}$, puis la calculer.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h vaut $\dfrac{(b+B)h}{2}$.
5. Calculer la valeur exacte de I, puis l'erreur commise par chacune des quatre méthodes. Les classer de la moins précise à la plus précise.
6. Les méthodes des milieux et des trapèzes encadrent-elles I ? Expliquer, à l'aide d'un schéma, pourquoi la méthode des milieux est ici bien meilleure que celle des rectangles : quelle compensation se produit sur chaque intervalle ?
7. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous, qui renvoie l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ obtenue par la méthode des milieux avec n intervalles. Les pointillés sont à remplacer par les expressions manquantes.

```
def milieux(f, a, b, n):
    h = ...
    S = 0
    for k in range(n):
        m = ...
        S = S + f(m)
    return ...
```

8. On définit en Python la fonction `g` par `def g(x): return 1/x`. Que renvoie l'appel `milieux(g, 1, 2, 4)` ? Et que renvoie, d'après vous, `milieux(g, 1, 2, 1000)` ?

EXERCICE 39 : LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO ⋆⋆

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, et l'on note $\mathcal{D}$ le domaine situé sous sa courbe, au-dessus de l'axe des abscisses.

1. Démontrer que la courbe de f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1. En déduire, sans aucun calcul d'intégrale, que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.
2. On tire au hasard un point $P(x\,;y)$ dans le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$, chaque point ayant la même chance d'être choisi. On admet que la probabilité que P appartienne à $\mathcal{D}$ est égale au quotient de l'aire de $\mathcal{D}$ par celle du carré.
   (a) Que vaut cette probabilité ?
   (b) Démontrer que P appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $x^2+y^2 \leqslant 1$.
3. On répète l'expérience N fois de façon indépendante, et l'on note c le nombre de points tombés dans $\mathcal{D}$. Expliquer pourquoi $\dfrac{4c}{N}$ fournit une valeur approchée de π.
4. Deux simulations ont donné les résultats suivants : pour $N = 1\,000$, $c = 782$; pour $N = 10\,000$, $c = 7\,864$. Donner dans chaque cas l'approximation de π obtenue, et la comparer à π.
5. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous, qui renvoie l'approximation de π obtenue à partir de N tirages. L'instruction `random()` renvoie un nombre au hasard dans $[0\,;1[$.

```python
from random import random

def approx_pi(N):
    c = 0
    for i in range(N):
        x = random()
        y = random()
        if ... :
            c = ...
    return ...
```

6. Deux appels successifs à `approx_pi(1000)` renvoient des résultats différents. Est-ce normal ? Cela constituerait-il une erreur de programmation ?

7. *Généralisation.* Soit g une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, majorée par un réel $M > 0$. On tire N points au hasard dans le rectangle $[a\,;b] \times [0\,;M]$ et l'on note c le nombre de points situés sous la courbe de g. Justifier que $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est approché par $(b-a)\,M\,\dfrac{c}{N}$.

8. Deux simulations avec $N = 1\,000$ donnent des approximations de π dont les deux premières décimales diffèrent souvent. Cette méthode est-elle précise ? En pratique, il faut multiplier N par 100 pour gagner une décimale : comparer avec la méthode des milieux de l'exercice 38 et conclure.

EXERCICE 40 : L'ALGORITHME DE BROUNCKER POUR $\ln(2)$ ⋆⋆⋆

Au milieu du XVII$^{\text{e}}$ siècle, William Brouncker propose une écriture de $\ln(2)$ comme somme d'une infinité de termes. On se propose de la retrouver.

Partie A : une somme géométrique.

1. Soit n un entier naturel non nul et x un réel différent de -1. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$$

2. En déduire que pour tout réel $x \neq -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n\,\frac{x^n}{1+x}$$

Partie B : intégration.

On pose, pour tout entier naturel n : $\displaystyle R_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$, et $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

4. En intégrant sur $[0\,;1]$ l'égalité de la question 2, démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ln(2) = S_n + (-1)^n R_n$$

5. Démontrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$, puis en déduire que $0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

6. En déduire que $|\ln(2) - S_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$.

Partie C : la forme de Brouncker.

7. En regroupant les termes de S_{2m} deux par deux, démontrer que :

$$S_{2m} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(2j+1)(2j+2)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)\times 2m}$$

C'est l'écriture obtenue par Brouncker.

8. Calculer les valeurs exactes de S_2, S_4 et S_6, puis leurs valeurs approchées au millième. Les comparer à $\ln(2) \approx 0{,}693$.

9. Combien de termes faut-il sommer pour être certain d'approcher $\ln(2)$ à 10^{-3} près ? Cet algorithme est-il efficace ?

10. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous, qui renvoie le nombre n de termes sommés ainsi que la valeur de S_n, l'arrêt ayant lieu dès que la majoration de la question 6 garantit la précision e.

```
def brouncker(e):
    S = 0
    n = 0
    while ... :
        n = n + 1
        S = S + ...
    return n, S
```

11. Que renvoie l'appel `brouncker(0.001)` ? On ne demande pas d'exécuter la fonction, mais de prévoir le premier des deux nombres renvoyés à l'aide de la question 9.

12. *Pour finir.* Démontrer que $S_{2n} = H_{2n} - H_n$, où H_n est la somme harmonique de l'exercice 37. Quel lien cela établit-il entre les exercices 36, 37 et 40 ?

Pour aller plus loin

EXERCICE 41 ⋆⋆

Soit f une fonction continue sur $[1\,;+\infty[$ telle que, pour tout réel $t \geqslant 1$, $f(t) \geqslant \dfrac{1}{t}$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^1 f(t)\,t^n\,\mathrm{d}t$$

1. On suppose dans cette question que f est à valeurs positives. Déterminer le signe de I_n, puis le sens de variation de la suite (I_n).

2. On ne suppose plus f positive, mais on admet qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $|f(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [0\,;1]$. Majorer $|I_n|$ et montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Soient f une fonction continue sur $[0\,;+\infty[$, et G la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $G(0) = f(0)$ et

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et donner une expression de $G'(x)$ pour $x>0$.
2. Montrer que G est continue en 0. On pourra reconnaître en $G(x)$ un taux d'accroissement.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. Soient f une fonction continue sur un intervalle I, u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur J par

$$G(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   On notera que, si F est une primitive de f sur I, alors $G(x)=F\left(v(x)\right)-F\left(u(x)\right)$ pour tout $x\in J$.

2. Montrer que, pour tout réel $x>0$:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=0$$

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

La constante d'Euler. On reprend les notations de l'exercice 37, où $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite $\left(H_n-\ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Soit α un réel strictement positif. On utilise les fonctions puissances $x\mapsto x^\alpha$ de l'exercice 31 du chapitre 5. On pose, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^\alpha=1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha$$

Encadrer S_n par la méthode des rectangles et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha+1}$$

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆⋆

Pour tout réel $x\neq 0$, on pose

$$f(x)=\int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Étudier les variations de f sur chacun des deux intervalles $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$.
2. Montrer que, pour tout réel $x>0$, $f(x)\geqslant\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer, à l'aide d'un encadrement, que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.
4. Trouver une constante $C>0$ telle que, pour tout $t\in[-1\,;1]$, $\left|\mathrm{e}^t-1\right|\leqslant C\left|t\right|$.
5. Déduire de la question 4 la limite de f en 0.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆⋆

Soit α un réel strictement positif. Comme à l'exercice 46, on utilise les fonctions puissances de l'exercice 31 du chapitre 5. On pose, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$$

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$.
2. On suppose toujours $\alpha > 1$. Montrer que la suite (S_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\alpha - 1} \,;\, \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\right]$.
3. En utilisant l'exercice 37, montrer que, si $\alpha \in]0\,;1]$, la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆⋆

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$. On se propose d'établir l'inégalité :

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Pour x réel, on pose :

$$S(x) = \int_a^b (f(t) + x\,g(t))^2\,\mathrm{d}t$$

Vérifier que la fonction S est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 et à valeurs positives. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆⋆

L'inégalité de Tchebychev. Soient f et g deux fonctions continues et croissantes sur $[0\,;1]$.

1. Pour x et y dans $[0\,;1]$, quel est le signe de $(f(y) - f(x))\,(g(y) - g(x))$?
2. En déduire que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$
3. Donner une version discrète, c'est-à-dire portant sur des sommes, de cette inégalité.