CORRIGÉ – CHAPITRE 7

DÉNOMBREMENT

Cardinal et principes de base

EXERCICE 1 ⋆

1. Les entiers de 1 à 20 : $\boxed{\text{Card}(A) = 20}$
2. Les diviseurs de 36 se regroupent par paires de produit 36 :

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$$

d'où $B = \{1\,;2\,;3\,;4\,;6\,;9\,;12\,;18\,;36\}$: $\boxed{\text{Card}(B) = 9}$

3. Les entiers pairs de 1 à 100 sont $2, 4, \ldots, 100$, c'est-à-dire les $2k$ pour k allant de 1 à 50 : $\boxed{\text{Card}(C) = 50}$
4. Le mot DENOMBREMENT contient les lettres D, E, N, O, M, B, R et T, les autres étant des répétitions : $\boxed{\text{Card}(D) = 8}$
5. Les multiples de 7 inférieurs ou égaux à 200 sont les $7k$ avec $7k \leqslant 200$, soit $k \leqslant \dfrac{200}{7} \approx 28{,}6$: $\boxed{\text{Card}(E) = 28}$
6. Comme $7^2 = 49 \leqslant 50$ et $8^2 = 64 > 50$, on a $F = \{0\,;1\,;2\,;\ldots\,;7\}$: $\boxed{\text{Card}(F) = 8}$

On prendra garde en f) à ne pas oublier 0, qui appartient bien à $\mathbb{N}$.

EXERCICE 2 ⋆

1. Le principe additif donne :

$$\text{Card}(A \cup B) = 15 + 12 - 5 = \boxed{22}$$

2. Les deux ensembles étant disjoints, $\text{Card}(A \cap B) = 0$:

$$\text{Card}(A \cup B) = 20 + 13 = \boxed{33}$$

3. On isole l'intersection dans la formule :

$$\text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cup B) = 25 + 22 - 40 = \boxed{7}$$

4. Tout élément de E appartient à A ou à $\overline{A}$, mais jamais aux deux : ces deux ensembles sont disjoints et leur réunion est E tout entier. Le principe additif dans le cas disjoint donne donc :

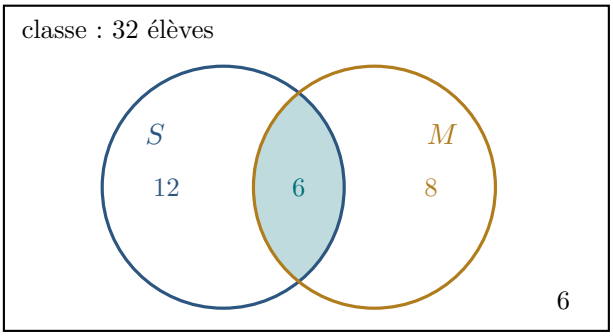
$$\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A})$$

$$\text{Card}(\overline{A}) = 50 - 18 = \boxed{32}$$

Cette dernière égalité, $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$, est le fondement de toutes les questions du type « au moins un… » : il est souvent bien plus simple de compter ce que l'on ne veut pas.

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. On note S l'ensemble des sportifs et M celui des musiciens.



2. Le principe additif donne :

$$\text{Card}(S \cup M) = 18 + 14 - 6 = \boxed{26 \text{ élèves}}$$

3. Les élèves ne pratiquant ni l'un ni l'autre sont ceux qui n'appartiennent pas à $S \cup M$:

$$32 - 26 = \boxed{6 \text{ élèves}}$$

4. Un élève faisant uniquement du sport appartient à S mais pas à M :

$$18 - 6 = \boxed{12 \text{ élèves font uniquement du sport}}$$

$$14 - 6 = \boxed{8 \text{ élèves font uniquement de la musique}}$$

5. Les quatre catégories sont deux à deux disjointes et recouvrent toute la classe :

$$12 + 8 + 6 + 6 = 32$$

$$\boxed{\text{Le décompte est cohérent}}$$

EXERCICE 4 ⋆

1. Composer un menu, c'est faire trois choix successifs et indépendants :

$$3 \times 5 \times 4 = \boxed{60 \text{ menus}}$$

2.

$$6 \times 8 \times 3 = \boxed{144 \text{ tenues}}$$

3. La plaque comporte 4 lettres et 3 chiffres, chacun pouvant être répété :

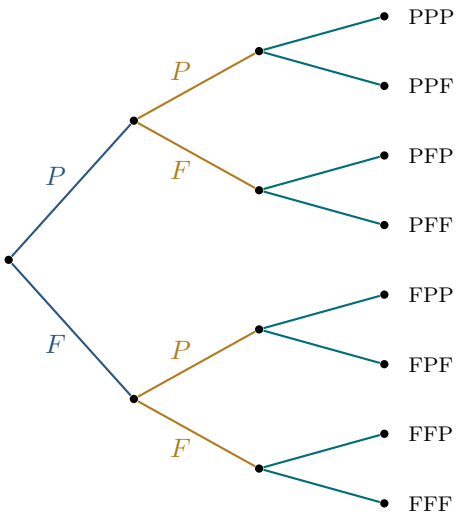
$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 26^4 \times 10^3 = \boxed{456\,976\,000 \text{ plaques}}$$

4. Chacune des 10 questions offre 4 choix :

$$4^{10} = \boxed{1\,048\,576 \text{ grilles}}$$

EXERCICE 5 ⋆

1. (a) Chaque lancer offre deux issues, notées P (pile) et F (face).



   (b) L'arbre comporte 8 chemins complets, ce que confirme le principe multiplicatif :

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = \boxed{\text{8 issues}}$$

   (c) En parcourant la liste, les chemins comportant exactement deux « pile » sont PPF, PFP et FPP :

$$\boxed{\text{3 chemins}}$$

   On peut aussi les compter directement : il s'agit de choisir lesquels des trois lancers donnent pile, soit $\binom{3}{2} = 3$.

2. (a) L'arbre comporte 6 branches au premier niveau (les faces du dé), chacune se divisant en 2 (pile ou face).

   (b)

$$6 \times 2 = \boxed{\text{12 issues}}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Un nombre de trois chiffres s'écrit $\overline{abc}$, où a ne peut pas être nul.

$$\underbrace{9}_{a \in \{1;\ldots;9\}} \times \underbrace{10}_{b} \times \underbrace{10}_{c} = \boxed{\text{900 nombres}}$$

   On le vérifie autrement : il y a $999 - 100 + 1 = 900$ entiers de 100 à 999.

2. Le nombre est pair si son chiffre des unités appartient à $\{0\,;2\,;4\,;6\,;8\}$:

$$9 \times 10 \times 5 = \boxed{\text{450 nombres}}$$

3. Les trois chiffres doivent être distincts. Il reste 9 choix pour a, puis 9 pour b (les dix chiffres sauf a, et 0 redevient autorisé), puis 8 pour c :

$$9 \times 9 \times 8 = \boxed{\text{648 nombres}}$$

4. Ici deux contraintes se croisent, et il faut distinguer deux cas selon le chiffre des unités.
   Premier cas : $c = 0$. Il reste 9 choix pour a, puis 8 pour b :

$$1 \times 9 \times 8 = 72$$

   Second cas : $c \in \{2\,;4\,;6\,;8\}$, soit 4 possibilités. Le chiffre a doit être non nul et différent de c, ce qui laisse 8 choix ; puis b doit différer de a et de c, ce qui laisse 8 choix :

$$4 \times 8 \times 8 = 256$$

   Ces deux cas étant disjoints, le principe additif donne :

$$72 + 256 = \boxed{328 \text{ nombres}}$$

Le piège de la question 4 est de traiter les deux contraintes simultanément sans distinguer les cas : si l'on choisit c parmi 5 puis a parmi 8, on oublie que lorsque $c = 0$, le chiffre a dispose en réalité de 9 possibilités.

Listes et p-uplets

EXERCICE 7 ⋆

Dans chaque cas les répétitions sont autorisées et l'ordre compte : il s'agit de p-uplets, dénombrés par n^p.

1. 4-uplet de $\{0\,;1\,;\ldots\,;9\}$, qui compte 10 éléments :

$$10^4 = \boxed{10\,000 \text{ codes}}$$

2. 6-uplet d'un ensemble à $26 + 10 = 36$ caractères :

$$36^6 = \boxed{2\,176\,782\,336 \text{ mots de passe}}$$

3. Avec remise, chaque tirage se fait parmi les mêmes 8 boules :

$$8^5 = \boxed{32\,768 \text{ tirages}}$$

4. 3-uplet de l'alphabet : $26^3 = \boxed{17\,576 \text{ mots}}$
5. 12-uplet d'un ensemble à 3 éléments : $3^{12} = \boxed{531\,441 \text{ grilles}}$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1.

$$10^4 = \boxed{10\,000}$$

2. Le premier chiffre est imposé, les trois autres sont libres :

$$1 \times 10^3 = \boxed{1\,000}$$

3. Chaque chiffre est choisi parmi les neuf chiffres non nuls :

$$9^4 = \boxed{6\,561}$$

4. L'événement contraire de « contenir au moins un 0 » est « n'en contenir aucun », ce que la question 3 vient de dénombrer :

$$10\,000 - 6\,561 = \boxed{3\,439}$$

Dénombrer directement obligerait à distinguer les codes contenant un, deux, trois ou quatre zéros : le passage au complémentaire évite ces quatre cas.

5. Chaque chiffre est choisi parmi $\{0\,;2\,;4\,;6\,;8\}$:

$$5^4 = \boxed{625}$$

6. Le dernier chiffre est imposé : $10^3 = \boxed{1\,000}$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Le tirage est successif avec remise : c'est un 5-uplet d'un ensemble à 10 éléments.

$$10^5 = \boxed{100\,000 \text{ tirages}}$$

2. Aucune boule rouge signifie que les cinq boules sont vertes, choisies parmi 6 :

$$6^5 = \boxed{7\,776 \text{ tirages}}$$

3. Par passage au complémentaire :

$$100\,000 - 7\,776 = \boxed{92\,224 \text{ tirages}}$$

4. Les tirages étant équiprobables, la probabilité est le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles :

$$p = \frac{92\,224}{100\,000} \approx \boxed{0{,}922}$$

5. Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir une rouge », de probabilité $\frac{4}{10} = 0{,}4$. Les cinq tirages étant indépendants grâce à la remise, le nombre X de boules rouges suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}4$.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}4)^5 = 1 - 0{,}6^5 \approx 0{,}922$$

$$\boxed{\text{Les deux méthodes donnent le même résultat}}$$

On reconnaît d'ailleurs exactement le même calcul : $0{,}6^5 = \dfrac{6^5}{10^5}$.

PERMUTATIONS ET ARRANGEMENTS

EXERCICE 10 ⋆

1.

$$5! = \boxed{120} \quad ; \quad 7! = \boxed{5\,040} \quad ; \quad 1! = \boxed{1} \quad ; \quad 0! = \boxed{1}$$

La valeur $0! = 1$ est une convention, qui rend cohérentes les formules du chapitre.

2. On simplifie sans jamais calculer les factorielles complètes.

(a) $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = \boxed{56}$

(b) $\dfrac{10!}{8!} = 10 \times 9 = \boxed{90}$

(c) $\dfrac{100!}{98!} = 100 \times 99 = \boxed{9\,900}$

(d) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{(n+1) \times n!}{n!} = \boxed{n+1}$

3. Pour $n \geqslant 2$, on écrit $n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} = \boxed{n(n-1)}$$

4. D'après la question précédente appliquée à $n+1$:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1) \times n$$

On résout donc $n(n+1) = 42$, c'est-à-dire $n^2+n-42 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1+168 = 169$, d'où $\sqrt{\Delta} = 13$ et :

$$n = \frac{-1-13}{2} = -7 \qquad \text{ou} \qquad n = \frac{-1+13}{2} = 6$$

Seule la solution positive convient : $\boxed{n = 6}$

EXERCICE 11 ⋆

Dans les quatre situations, il s'agit d'ordonner *tous* les éléments d'un ensemble : ce sont des permutations.

1. $5! = \boxed{120 \text{ rangements}}$

2. $8! = \boxed{40\,320 \text{ dispositions}}$

3. Le mot CHIEN compte 5 lettres distinctes, le mot JUPITER en compte 7 :

$$5! = \boxed{120 \text{ anagrammes}} \quad ; \quad 7! = \boxed{5\,040 \text{ anagrammes}}$$

4. $4! = \boxed{24 \text{ classements}}$

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. (a) $6! = \boxed{720 \text{ dispositions}}$

(b) On considère Alice et Bob comme un seul bloc. Il reste alors 5 objets à ordonner : le bloc et les quatre autres personnes, soit 5! dispositions. Mais à l'intérieur du bloc, Alice et Bob peuvent permuter, ce qui double le décompte :

$$5! \times 2 = 120 \times 2 = \boxed{240 \text{ dispositions}}$$

(c) Par passage au complémentaire :

$$720 - 240 = \boxed{480 \text{ dispositions}}$$

2. Deux configurations sont possibles : soit une fille occupe la première place, soit un garçon. Chacune fixe entièrement l'alternance. Dans les deux cas, on ordonne librement les trois filles entre elles et les trois garçons entre eux :

$$2 \times 3! \times 3! = 2 \times 6 \times 6 = \boxed{72 \text{ dispositions}}$$

3. Même raisonnement qu'en 1b, avec 4 objets à ordonner (le bloc de deux livres de mathématiques et les trois autres livres) :

$$4! \times 2 = 24 \times 2 = \boxed{48 \text{ rangements}}$$

EXERCICE 13 ⋆

Dans les cinq situations, l'ordre compte et les répétitions sont impossibles : ce sont des arrangements.

1. $$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = \boxed{6\,840 \text{ tiercés}}$$

2. $$A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = \boxed{1\,320 \text{ podiums}}$$

3. $$A_{25}^3 = 25 \times 24 \times 23 = \boxed{13\,800 \text{ bureaux}}$$

4. $$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \boxed{5\,040 \text{ codes}}$$

5. $$A_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24 = \boxed{15\,600 \text{ sigles}}$$

On remarquera la différence avec l'exercice 7 : un code de 4 chiffres *quelconques* donne $10^4 = 10\,000$ possibilités, contre 5 040 seulement si les chiffres doivent être distincts.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. $$A_{25}^3 = 25 \times 24 \times 23 = \boxed{13\,800 \text{ bureaux}}$$

2. La place de président étant occupée par M. Dupont, il reste à pourvoir les deux autres fonctions parmi les 24 membres restants :

$$A_{24}^2 = 24 \times 23 = \boxed{552 \text{ bureaux}}$$

3. M. Dupont peut occuper l'une des trois fonctions, et le raisonnement précédent s'applique à chaque fois :

$$3 \times A_{24}^2 = 3 \times 552 = \boxed{1\,656 \text{ bureaux}}$$

4. Il s'agit de choisir les trois responsables parmi les 24 autres membres :

$$A_{24}^3 = 24 \times 23 \times 22 = \boxed{12\,144 \text{ bureaux}}$$

5. Un bureau comporte M. Dupont ou ne le comporte pas : ces deux cas sont disjoints et recouvrent toutes les possibilités.

$$1\,656 + 12\,144 = 13\,800$$

$$\boxed{\text{Le décompte est cohérent}}$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Avec remise et avec ordre : c'est un 4-uplet.

$$12^4 = \boxed{20\,736 \text{ tirages}}$$

2. Sans remise et avec ordre : c'est un arrangement.

$$A_{12}^4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = \boxed{11\,880 \text{ tirages}}$$

3. Un tirage simultané ignore l'ordre et interdit les répétitions : c'est une combinaison.

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{11\,880}{24} = \boxed{495 \text{ tirages}}$$

4.

$$495 \times 4! = 495 \times 24 = 11\,880$$

L'égalité se comprend ainsi : se donner un tirage ordonné, c'est d'abord choisir *quelles* boules sortent — soit $\binom{12}{4}$ possibilités — puis dans quel *ordre* elles sortent, soit 4! possibilités.

$$\boxed{A_{12}^4 = \binom{12}{4} \times 4!}$$

C'est exactement la démonstration du théorème 2 du cours.

COMBINAISONS

EXERCICE 16 ⋆

a) $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \boxed{10}$

b) $\binom{7}{0} = \boxed{1}$

c) $\binom{7}{7} = \boxed{1}$

d) $\binom{10}{1} = \boxed{10}$

e) $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{56}$

f) $\binom{6}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \boxed{15}$

g) Par symétrie, $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = \boxed{190}$

h) $\binom{12}{5} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \boxed{792}$

En g), calculer directement $\binom{20}{18}$ demanderait un produit de dix-huit facteurs : la symétrie $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ ramène le calcul à deux facteurs.

EXERCICE 17 ⋆

Dans les cinq situations, échanger deux objets choisis ne change rien au résultat : l'ordre n'intervient pas, et aucun objet n'est choisi deux fois. Ce sont des combinaisons.

1.

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \boxed{4\,845 \text{ comités}}$$

2. $$\binom{32}{5} = \boxed{201\,376 \text{ mains}}$$

3. $$\binom{49}{6} = \boxed{13\,983\,816 \text{ grilles}}$$

4. $$\binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{455 \text{ délégations}}$$

5. $$\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = \boxed{28 \text{ choix}}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Un groupe est une partie de 5 éléments parmi 30 :
$$\binom{30}{5} = \boxed{142\,506 \text{ groupes}}$$

2. On choisit les 5 élèves parmi les 18 filles :
$$\binom{18}{5} = \boxed{8\,568 \text{ groupes}}$$

3. Deux choix indépendants se combinent par le principe multiplicatif : les 3 filles parmi 18, puis les 2 garçons parmi 12.
$$\binom{18}{3} \times \binom{12}{2} = 816 \times 66 = \boxed{53\,856 \text{ groupes}}$$

4. Le complémentaire de « au moins un garçon » est « aucun garçon », c'est-à-dire la question 2 :
$$142\,506 - 8\,568 = \boxed{133\,938 \text{ groupes}}$$

5. On choisit le garçon parmi 12, puis les 4 filles parmi 18 :
$$\binom{12}{1} \times \binom{18}{4} = 12 \times 3\,060 = \boxed{36\,720 \text{ groupes}}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. $$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \quad ; \quad \binom{9}{6} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$
$$\boxed{\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84}$$

2. $$\binom{7}{2} = 21 \quad ; \quad \binom{7}{3} = 35 \quad ; \quad \binom{8}{3} = 56$$
$$\boxed{21 + 35 = 56}$$

3. Chaque ligne commence et se termine par 1, et tout coefficient intérieur est la somme des deux situés juste au-dessus de lui : c'est la relation de Pascal.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

4. On lit à l'intersection de la ligne et de la colonne :

$$\boxed{\binom{6}{2} = 15} \quad ; \quad \boxed{\binom{7}{4} = 35}$$

5. Les sommes successives valent 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 et 128 : ce sont les puissances de 2.

$$\boxed{\text{Conjecture : } \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n}$$

Cette conjecture est démontrée à l'exercice 29.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1.
$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = \boxed{1}$$
$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n}$$

2. On applique la formule en remplaçant p par $n-p$:

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

On reconnaît exactement l'expression de $\binom{n}{p}$, les deux facteurs du dénominateur étant simplement échangés.

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

Interprétation : choisir les p éléments que l'on garde revient à choisir les $n-p$ que l'on écarte.

3. On réduit les deux fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!}\\ &= \frac{n!\,(p+1)}{(p+1)!\,(n-p)!}+\frac{n!\,(n-p)}{(p+1)!\,(n-p)!}\\ &= \frac{n!\,[(p+1)+(n-p)]}{(p+1)!\,(n-p)!}=\frac{n!\,(n+1)}{(p+1)!\,(n-p)!}\end{aligned}$$

Or $n!\,(n+1)=(n+1)!$ et $n-p=(n+1)-(p+1)$:

$$\boxed{\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{(n+1)!}{(p+1)!\,((n+1)-(p+1))!}=\binom{n+1}{p+1}}$$

4. On part du membre de gauche :

$$p\binom{n}{p}=p\times\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=\frac{n!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$

puisque $p!=p\times(p-1)!$. On développe ensuite le membre de droite :

$$n\binom{n-1}{p-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}=\frac{n!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$

en remarquant que $(n-1)-(p-1)=n-p$. Les deux membres sont égaux :

$$\boxed{p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}}$$

5. Les deux membres comptent la même chose de deux façons différentes.

> À gauche : on choisit le comité, puis son président parmi ses p membres.
>
> À droite : on choisit le président, puis les $p-1$ autres membres.

C'est un raisonnement de *double dénombrement* : compter un même ensemble de deux manières fournit une identité, sans aucun calcul de factorielles.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Un tirage simultané ignore l'ordre : toutes les questions relèvent des combinaisons.

1.

$$\binom{32}{5}=\boxed{201\,376 \text{ mains}}$$

2. On choisit 2 as parmi les 4, puis 3 cartes parmi les 28 qui ne sont pas des as :

$$\binom{4}{2}\times\binom{28}{3}=6\times 3\,276=\boxed{19\,656 \text{ mains}}$$

3. Les cinq cartes sont choisies parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as :

$$\binom{28}{5}=\boxed{98\,280 \text{ mains}}$$

4. Par passage au complémentaire :

$$201\,376 - 98\,280 = \boxed{103\,096 \text{ mains}}$$

5. Les quatre as sont imposés, et il reste une carte à choisir parmi les 28 autres :

$$\binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 1 \times 28 = \boxed{28 \text{ mains}}$$

6. Le jeu comporte 8 cœurs, parmi lesquels il faut en choisir 5 :

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \boxed{56 \text{ mains}}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

Situation	**Répét.**	**Ordre**	**Nature**	**Dénombrement**
1. Code de 5 chiffres	oui	oui	p-uplet	$10^5 = 100\,000$
2. Podium parmi 10	non	oui	arrangement	$A_{10}^3 = 720$
3. 3 délégués parmi 30	non	non	combinaison	$\binom{30}{3} = 4\,060$
4. Rangement de 7 livres	non	oui	permutation	$7! = 5\,040$
5. 4 boules avec remise parmi 15	oui	oui	p-uplet	$15^4 = 50\,625$
6. Main de 5 cartes sur 52	non	non	combinaison	$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$
7. 2 lettres puis 3 chiffres, tous distincts	non	oui	deux arrangements	$A_{26}^2 \times A_{10}^3 = 468\,000$
8. 3 jetons sans remise parmi 10	non	oui	arrangement	$A_{10}^3 = 720$

Deux remarques. La situation 4 est un cas particulier d'arrangement, celui où l'on ordonne *tous* les éléments : $A_7^7 = 7!$. La situation 7 combine deux dénombrements indépendants, que le principe multiplicatif permet de multiplier : $A_{26}^2 = 650$ pour les lettres et $A_{10}^3 = 720$ pour les chiffres.

On comparera enfin les situations 2 et 8 : ce sont deux problèmes de nature très différente, mais leur dénombrement est identique. Choisir un podium parmi 10 concurrents ou tirer successivement 3 jetons sur 10, c'est deux fois choisir 3 objets ordonnés et distincts.

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**B**	Un 3-uplet d'un ensemble à 5 éléments se compte par $n^p = 5^3 = 125$. La réponse A donnerait 5×3, la réponse C donnerait A_5^3.
2	**B**	$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$. La réponse C est 5!.
3	**A**	$A_7^2 = 7 \times 6 = 42$. On multiplie deux facteurs consécutifs, pas 7 par lui-même.
4	**B**	$\binom{9}{2} = \dfrac{9 \times 8}{2} = 36$. La réponse A est $A_9^2 = 72$: elle oublie de diviser par 2!.
5	**A**	Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{10}{7} = \binom{10}{10-7} = \binom{10}{3}$.
6	**B**	« Successivement » impose l'ordre, « sans remise » interdit les répétitions : c'est un arrangement.
7	**C**	« Simultanément » signifie que l'ordre n'intervient pas : c'est une combinaison. C'est la seule différence avec la question précédente.
8	**B**	$\binom{n}{0} = 1$: il existe exactement une partie à zéro élément, l'ensemble vide.
9	**C**	Le mot ORANGE compte 6 lettres distinctes : $6! = 720$.
10	**B**	Sans distinction de rôle, l'ordre n'intervient pas : $\binom{30}{2} = \dfrac{30 \times 29}{2} = 435$. La réponse A est $A_{30}^2 = 870$.

EXERCICE 24 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Vraie**. Par définition, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$, et les $n-1$ premiers facteurs forment exactement $(n-1)!$.
2. **Fausse**. Par convention, $0! = 1$ et non 0. Cette convention n'est pas arbitraire : elle rend valables les formules du cours, par exemple $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$, ce qui est bien le nombre de permutations.
3. **Vraie**. C'est la propriété démontrée à l'exercice 20. Elle traduit le fait que choisir les p éléments retenus revient à choisir les $n-p$ éléments écartés.
4. **Vraie**. C'est la démonstration du théorème 2 : un arrangement s'obtient en choisissant d'abord la partie ($\binom{n}{p}$ possibilités), puis l'ordre ($p!$ possibilités).
5. **Fausse**. C'est la formule des *arrangements*. Le nombre de p-uplets est n^p. Contre-exemple avec $n = 3$ et $p = 2$: il y a $3^2 = 9$ couples, alors que $\dfrac{3!}{1!} = 6$.
6. **Fausse**. C'est au contraire une *combinaison*. L'arrangement correspond au cas où l'ordre compte.

7. **Fausse**. Cette égalité n'est vraie que si A et B sont disjoints. Contre-exemple avec $A = \{1\,;2\}$ et $B = \{2\,;3\}$:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\left(\{1\,;2\,;3\}\right) = 3 \qquad \text{alors que} \qquad 2 + 2 = 4$$

La formule générale est $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

8. **Vraie**. C'est la relation de Pascal, démontrée à l'exercice 20. C'est elle qui permet de construire le triangle de Pascal de proche en proche.

9. **Vraie**. En effet $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$, qui est bien le nombre de permutations. Une permutation n'est qu'un arrangement de *tous* les éléments.

10. **Fausse**. Un tirage simultané ne distingue pas l'ordre : il se dénombre par une combinaison. C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Un tirage simultané de 3 boules parmi 10 est une partie à 3 éléments :

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{120 \text{ tirages}}$$

2. Il faut choisir les 3 boules parmi les 4 rouges :

$$P(R) = \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{4}{120} = \boxed{\frac{1}{30} \approx 0{,}033}$$

3. On choisit 2 rouges parmi 4 et 1 verte parmi 6 :

$$P(D) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{6}{1}}{120} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120} = \boxed{\frac{3}{10} = 0{,}3}$$

4. L'événement contraire de M est « aucune boule rouge », c'est-à-dire trois vertes :

$$P\left(\overline{M}\right) = \frac{\binom{6}{3}}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(M) = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0{,}833}$$

5. Pour chaque valeur k, on choisit k rouges parmi 4 et $3-k$ vertes parmi 6 :

k	0	1	2	3
Nombre de tirages	20	60	36	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

On vérifie, en réduisant au dénominateur commun 30 :

$$\frac{5}{30} + \frac{15}{30} + \frac{9}{30} + \frac{1}{30} = \frac{30}{30} = \boxed{1}$$

6.
$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \boxed{\frac{6}{5} = 1{,}2}$$

7. On calcule $3 \times \frac{4}{10} = \frac{6}{5}$: les deux nombres coïncident.

$$\boxed{E(X) = n \times p \text{ où } p \text{ est la proportion de boules rouges}}$$

Ce n'est pas une coïncidence : cette égalité reste vraie pour un tirage sans remise. En revanche :

$$\boxed{X \text{ ne suit pas une loi binomiale}}$$

En effet, les tirages ne sont pas indépendants : une fois une boule rouge sortie, il n'en reste que trois pour les tirages suivants. Seule l'espérance est commune aux deux modèles, pas la loi elle-même. On le vérifie sur $P(X = 3)$: ici $\frac{1}{30} \approx 0{,}033$, alors que la loi binomiale donnerait $0{,}4^3 = 0{,}064$.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Un code est un 6-uplet d'un ensemble à $26 + 10 = 36$ caractères :
$$36^6 = \boxed{2\,176\,782\,336 \text{ codes}}$$

2. Chaque caractère est choisi parmi les 26 lettres :
$$26^6 = \boxed{308\,915\,776 \text{ codes}}$$

3. Le contraire de « au moins un chiffre » est « aucun chiffre », c'est-à-dire la question 2 :
$$2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = \boxed{1\,867\,866\,560 \text{ codes}}$$

4. Les caractères étant distincts et l'ordre comptant, c'est un arrangement :
$$A_{36}^6 = 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 = \boxed{1\,402\,410\,240 \text{ codes}}$$

5.
$$p = \frac{1\,402\,410\,240}{2\,176\,782\,336} \approx \boxed{0{,}644}$$

Près de deux codes sur trois ont tous leurs caractères distincts, ce qui peut surprendre : malgré les six caractères, les répétitions restent minoritaires.

6. Le premier caractère offre 26 choix, le dernier en offre 10, et les quatre du milieu sont libres :
$$26 \times 36^4 \times 10 = \boxed{436\,700\,160 \text{ codes}}$$

7. Le temps nécessaire, en secondes, est le quotient du nombre de codes par la vitesse :
$$\frac{2\,176\,782\,336}{10^6} \approx 2\,176{,}8 \text{ secondes}$$
$$\frac{2\,176{,}8}{60} \approx \boxed{36 \text{ minutes}}$$
$$\boxed{\text{Un tel code n'offre aucune sécurité contre une attaque automatisée}}$$

On mesure ici l'enjeu du dénombrement en cryptographie : allonger le code de deux caractères multiplierait ce temps par $36^2 = 1\,296$, soit près d'un mois.

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Un conseil est une partie de 5 éléments parmi 24 :

$$\binom{24}{5} = \boxed{42\,504 \text{ conseils}}$$

2.

$$\binom{15}{5} = \boxed{3\,003 \text{ conseils}}$$

3.

$$\binom{15}{3} \times \binom{9}{2} = 455 \times 36 = \boxed{16\,380 \text{ conseils}}$$

4. Le contraire est « aucune femme », c'est-à-dire cinq hommes parmi 9 :

$$42\,504 - \binom{9}{5} = 42\,504 - 126 = \boxed{42\,378 \text{ conseils}}$$

5.

$$p = \frac{16\,380}{42\,504} \approx \boxed{0{,}385}$$

6. Trois fonctions distinctes attribuées à trois des cinq membres : l'ordre compte, c'est un arrangement.

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = \boxed{60 \text{ répartitions}}$$

7. Le principe multiplicatif combine les deux étapes :

$$42\,504 \times 60 = \boxed{2\,550\,240 \text{ configurations}}$$

Cet exercice illustre la complémentarité des deux outils : la combinaison pour désigner *qui* siège, l'arrangement pour décider *quel rôle* chacun occupe.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Le choix des 5 numéros ignore l'ordre : c'est une combinaison. Le numéro chance est ensuite choisi parmi 10, indépendamment, d'où le produit :

$$\binom{49}{5} \times 10 = 1\,906\,884 \times 10 = \boxed{19\,068\,840 \text{ grilles}}$$

2. Une seule grille est gagnante parmi toutes celles possibles :

$$p = \boxed{\frac{1}{19\,068\,840} \approx 5{,}2 \times 10^{-8}}$$

3. Les 49 numéros se répartissent en 5 gagnants et 44 perdants. Avoir exactement 4 bons numéros, c'est en choisir 4 parmi les 5 gagnants et 1 parmi les 44 perdants :

$$\binom{5}{4} \times \binom{44}{1} = 5 \times 44 = \boxed{220 \text{ grilles}}$$

4.

$$\binom{5}{3} \times \binom{44}{2} = 10 \times 946 = \boxed{9\,460 \text{ grilles}}$$

5. Il faut ajouter les grilles à 5 bons numéros, au nombre de $\binom{5}{5} = 1$:

$$p = \frac{9\,460 + 220 + 1}{1\,906\,884} = \frac{9\,681}{1\,906\,884} \approx \boxed{0{,}005\,077}$$

Environ une grille sur 197 comporte au moins trois bons numéros.

6. Une sélection de 10 numéros contient exactement $\binom{10}{5}$ grilles de 5 numéros :

$$\binom{10}{5} = \boxed{252 \text{ grilles}}$$

$$\boxed{\text{L'affirmation est fausse : les chances sont multipliées par 252, non par 2}}$$

Le joueur raisonne comme si le nombre de chances était proportionnel au nombre de numéros cochés, alors qu'il l'est au nombre de *parties* de 5 éléments que sa sélection contient. Ce serait évidemment 252 fois plus cher.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

1. On liste les parties par cardinal croissant :

$$\varnothing\ ;\ \{a\}\ ;\ \{b\}\ ;\ \{c\}\ ;\ \{a\,;b\}\ ;\ \{a\,;c\}\ ;\ \{b\,;c\}\ ;\ \{a\,;b\,;c\}$$

$$\boxed{E \text{ possède 8 parties}}$$

2. Construire une partie, c'est répondre par oui ou par non à n questions successives : « l'élément x_1 est-il dans la partie ? », puis x_2, et ainsi de suite. Chaque réponse offre deux possibilités, indépendamment des autres.
Une partie correspond donc exactement à un n-uplet de l'ensemble $\{\text{oui}\,;\text{non}\}$, qui compte deux éléments :

$$\boxed{\text{Le nombre de parties de } E \text{ est } 2^n}$$

Pour $n = 3$, on retrouve bien $2^3 = 8$.

3. Une partie de cardinal p est une combinaison de p éléments parmi n, il y en a donc $\binom{n}{p}$. Or toute partie a un cardinal compris entre 0 et n, et ces cas sont deux à deux disjoints. Le principe additif donne :

$$\text{nombre de parties} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

En comparant avec la question 2, où le même nombre a été trouvé égal à 2^n :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n}$$

Ce raisonnement est un *double dénombrement* : le même ensemble a été compté de deux façons.

4. La ligne $n = 4$ du triangle de Pascal est 1, 4, 6, 4, 1 :

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

$$\boxed{\text{L'égalité est vérifiée}}$$

La conjecture de l'exercice 19 est donc démontrée.

5.
$$2^{10} = \boxed{1\,024 \text{ parties}}$$

6. Pour $n = 4$, les parties de cardinal pair sont celles de cardinal 0, 2 ou 4 :
$$\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 6 + 1 = 8 = 2^3$$
Pour $n = 5$, ce sont celles de cardinal 0, 2 ou 4 :
$$\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + 10 + 5 = 16 = 2^4$$
$$\boxed{\text{Conjecture : il y a } 2^{n-1} \text{ parties de cardinal pair}}$$
Autrement dit, exactement la moitié des parties ont un cardinal pair.

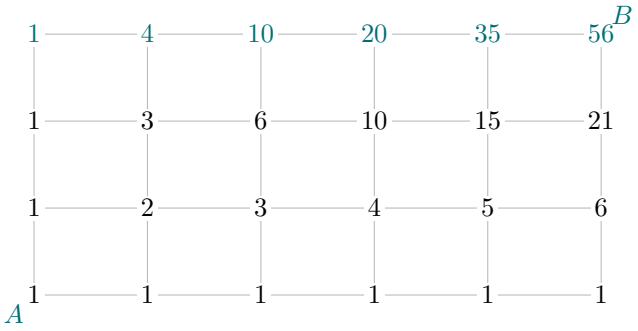
7. Il suffit de retirer les deux parties exclues, à savoir $\varnothing$ et E :
$$\boxed{2^n - 2 \text{ parties}}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. Pour aller de $A(0\,;0)$ à $B(5\,;3)$, le livreur doit progresser de 5 unités vers la droite et de 3 unités vers le haut. Comme chaque déplacement vaut exactement une unité dans l'une des deux directions :
$$\boxed{\text{tout chemin comporte } 5 + 3 = 8 \text{ déplacements, dont 5 vers la droite}}$$

2. Un chemin est entièrement décrit par la donnée des étapes qui sont des déplacements vers la droite : les autres sont nécessairement vers le haut. Il s'agit donc de choisir 5 étapes parmi les 8, sans tenir compte de l'ordre — c'est une combinaison.
$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{56 \text{ chemins}}$$

3. Un nœud ne peut être atteint qu'en venant de celui situé immédiatement à sa gauche ou de celui situé immédiatement en dessous : le nombre de chemins qui y mènent est donc la somme de ces deux nombres.



On lit bien 56 en B. Cette règle de construction est exactement la relation de Pascal :
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$
$$\boxed{\text{Le tableau des chemins est un triangle de Pascal, présenté en diagonale}}$$
On y retrouve d'ailleurs les lignes du triangle : 1, 2, 3, 4… puis 1, 3, 6, 10… qui sont les nombres triangulaires.

4. Le trajet se décompose en deux étapes indépendantes, que le principe multiplicatif permet de combiner.
   De $A(0\,;0)$ à $C(2\,;1)$: 3 déplacements dont 2 vers la droite, soit $\binom{3}{2} = 3$ chemins.
   De $C(2\,;1)$ à $B(5\,;3)$: il reste 3 unités vers la droite et 2 vers le haut, soit 5 déplacements dont 3 vers la droite, donc $\binom{5}{3} = 10$ chemins.

$$3 \times 10 = \boxed{\text{30 chemins passent par } C}$$

5. Par passage au complémentaire :

$$56 - 30 = \boxed{\text{26 chemins évitent } C}$$

6. Le raisonnement de la question 2 se transpose sans changement : un chemin comporte $p+q$ déplacements, dont p vers la droite.

$$\boxed{\text{Il existe } \binom{p+q}{p} \text{ chemins allant de l'origine au point } (p\,;q)}$$

   On remarquera que $\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$: compter les déplacements vers la droite ou vers le haut revient au même, ce qui est cohérent avec la symétrie du problème.

Pour aller plus loin

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. On vérifie l'égalité proposée : $(k+1)! - k! = (k+1) \times k! - k! = k \times k!$. La somme est donc télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} \Big((k+1)! - k!\Big) = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + ((n+1)! - n!)$$

   Tous les termes intermédiaires se simplifient, et il reste le dernier moins le premier :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1}$$

   Vérification : pour $n = 3$, $1 + 4 + 18 = 23 = 4! - 1$.

2. On cherche à écrire $\dfrac{k}{(k+1)!}$ comme une différence de deux termes consécutifs. En écrivant $k = (k+1) - 1$:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

   puisque $(k+1)! = (k+1) \times k!$. La somme télescope de nouveau :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}}$$

   Vérification : pour $n = 2$, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{3!}$.

Remarque. Toute la difficulté est de deviner la décomposition télescopique, que le poly donne pour la première somme et laisse chercher pour la seconde. La seconde somme tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, puisque $(n+1)!$ tend vers $+\infty$: c'est un exemple de somme infinie que l'on sait calculer exactement.

EXERCICE 32 ⋆⋆

L'ensemble $E = \{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$ possède 2^n parties (exercice 29). La moyenne cherchée est la somme des cardinaux de toutes ces parties, divisée par 2^n.

Première méthode : par un calcul. Il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k, donc la somme des cardinaux vaut $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. D'après la question 4 de l'exercice 20, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour $k \geqslant 1$, d'où, avec l'exercice 29 appliqué à un ensemble à $n-1$ éléments :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n\,2^{n-1}$$

Seconde méthode : sans calcul. Associons à chaque partie A son complémentaire $\overline{A}$ dans E. Cette association regroupe les 2^n parties en 2^{n-1} paires $\{A\,;\overline{A}\}$, et dans chaque paire $\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(\overline{A}) = n$ (exercice 2). La somme de tous les cardinaux vaut donc $2^{n-1}\times n$, comme ci-dessus.

$$\boxed{\text{La moyenne des cardinaux des parties de } E \text{ vaut } \frac{n\,2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}}$$

Vérification : pour $n=3$, les huit parties listées à l'exercice 29 ont pour cardinaux 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, de somme 12 et de moyenne $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Remarque. La seconde méthode montre la force d'un argument de symétrie : il remplace un calcul de somme par une observation. On retrouvera ce type d'argument à l'exercice suivant.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

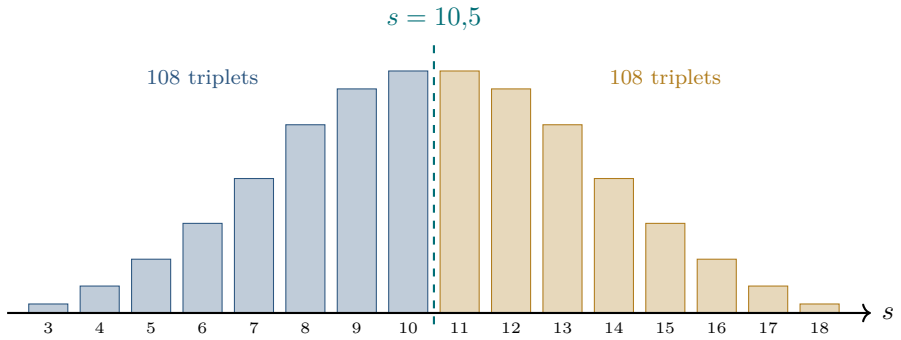
On modélise l'expérience par l'ensemble Ω des triplets $(a\,;b\,;c)$ d'éléments de $\{1\,;\ldots\,;6\}$, qui en compte $6^3 = 216$, tous équiprobables.

L'argument sans calcul. Associons à chaque triplet $(a\,;b\,;c)$ le triplet $(7-a\,;7-b\,;7-c)$, ce qui revient à lire, sur chaque dé, la face opposée à la face supérieure. C'est encore un élément de Ω, et en appliquant deux fois cette transformation on revient au triplet de départ : elle échange donc les triplets deux à deux, et réalise une correspondance terme à terme de Ω avec lui-même. Si la somme initiale vaut $s = a+b+c$, la nouvelle vaut $21-s$. Or

$$s \leqslant 10 \iff 21 - s \geqslant 11$$

La transformation fait donc correspondre exactement les triplets de total au plus 10 et ceux de total au moins 11 : ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments. Comme ils sont disjoints et que leur réunion est Ω, chacun en contient $\frac{216}{2} = 108$.

$$\boxed{P(\text{total} \leqslant 10) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}}$$



Ce diagramme représente le nombre de triplets donnant chaque total s : il est symétrique par rapport à $s = 10{,}5$, et la transformation $s \mapsto 21 - s$ échange la partie bleu ardoise et la partie ocre.

Remarque. Le même diagramme montre qu'avec trois dés, le total 10 (obtenu par 27 triplets) est plus fréquent que le total 9 (obtenu par 25 triplets), bien que chacun s'écrive de six façons comme somme de trois entiers entre 1 et 6. Cette question, posée à Galilée, est un piège classique : l'erreur la plus répandue est de compter les décompositions comme $9 = 3+3+3$ ou $9 = 1+2+6$ au lieu des triplets ordonnés, qui seuls sont équiprobables.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1. Pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$, avec la formule factorielle :

$$\frac{\binom{n}{p+1}}{\binom{n}{p}} = \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} \times \frac{p!\,(n-p)!}{n!} = \frac{n-p}{p+1}$$

car $(p+1)! = (p+1) \times p!$ et $(n-p)! = (n-p) \times (n-p-1)!$. Ce quotient est supérieur ou égal à 1 si et seulement si $n - p \geqslant p+1$, c'est-à-dire $p \leqslant \frac{n-1}{2}$.

$$\boxed{\frac{\binom{n}{p+1}}{\binom{n}{p}} \geqslant 1 \iff p \leqslant \frac{n-1}{2}}$$

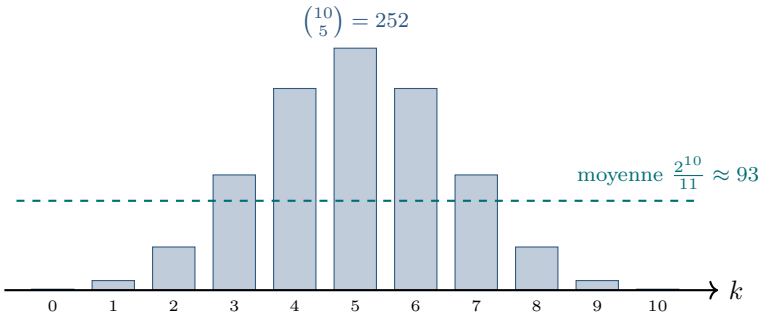
2. Si $p \leqslant m-1$, alors $p+1 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}$, donc $p \leqslant \frac{n}{2} - 1 < \frac{n-1}{2}$: d'après la question 1, $\binom{n}{p} \leqslant \binom{n}{p+1}$. En appliquant ceci pour $p = 0, 1, \ldots, m-1$:

$$\boxed{\binom{n}{0} \leqslant \binom{n}{1} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{m}}$$

Par symétrie, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, les coefficients décroissent ensuite jusqu'à $\binom{n}{n}$: la ligne n du triangle de Pascal monte puis descend, et son plus grand terme est $\binom{n}{m}$, le coefficient « central ».

3. Les $n+1$ nombres $\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{n}$ sont positifs, leur somme vaut 2^n (exercice 29) et le plus grand d'entre eux est $\binom{n}{m}$. D'une part, ce plus grand terme est inférieur à la somme ; d'autre part, il est supérieur à la moyenne $\frac{2^n}{n+1}$, sans quoi tous les termes seraient strictement inférieurs à la moyenne, et leur somme strictement inférieure à 2^n.

$$\boxed{\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{m} \leqslant 2^n}$$



Ce diagramme des coefficients $\binom{10}{k}$ montre qu'ils croissent jusqu'au terme central, puis décroissent symétriquement ; le maximum 252 dépasse bien la moyenne $\frac{1024}{11}$, comme l'affirme la question 3.

Remarque. L'encadrement est grossier mais donne le bon ordre de grandeur exponentiel : pour $n = 100$, il situe $\binom{100}{50} \approx 1{,}01 \times 10^{29}$ entre $1{,}26 \times 10^{28}$ et $1{,}27 \times 10^{30}$. Une estimation beaucoup plus précise, la formule de Stirling, est étudiée après le baccalauréat.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ ».
   Initialisation : pour $n = 0$, les deux membres valent 1, puisque $\binom{0}{0} = 1$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier n, et soient a et b deux réels. Alors

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

   Dans la seconde somme, on pose $j = k+1$, qui varie de 1 à $n+1$: $\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j$. On regroupe alors les termes de même puissance de b : le terme en b^0 vient de la première somme seule, le terme en b^{n+1} de la seconde seule, et pour $1 \leqslant j \leqslant n$ on additionne les deux contributions :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) a^{n+1-j} b^j + b^{n+1}$$

   La relation de Pascal (exercice 20) donne $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$, et l'on a $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Il vient $(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

   Remarque. C'est la raison du nom de « coefficients binomiaux » : ce sont les coefficients du développement d'une puissance du binôme $a+b$. Le triangle de Pascal de l'exercice 19 se lit ainsi : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ correspond à la ligne 1, 3, 3, 1.

2. Avec $a = b = 1$, on obtient $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$, ce qui redonne l'exercice 29 par une autre voie. Avec $a = 1$ et $b = -1$, pour $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0}$$

   Pour $n = 0$, cette seconde somme vaudrait 1, puisque $0^0 = 1$ par convention : c'est pourquoi on a supposé $n \geqslant 1$.

3. Dans la somme alternée, les termes d'indice pair sont comptés avec le signe + et ceux d'indice impair avec le signe − : elle vaut donc $A_n - B_n$. La première somme vaut $A_n + B_n$. On a ainsi

$$A_n + B_n = 2^n \qquad \text{et} \qquad A_n - B_n = 0$$

d'où, en ajoutant puis en soustrayant :

$$\boxed{A_n = B_n = 2^{n-1}}$$

Interprétation. A_n est le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à n éléments : c'est la conjecture formulée à la question 6 de l'exercice 29, désormais démontrée. Exactement la moitié des parties ont un cardinal pair.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

D'après la formule du binôme (exercice 35, avec $a = 1$ et $b = t$), pour tout réel t :

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$$

Les deux membres sont des fonctions continues de t ; on les intègre entre 0 et x, comme au chapitre 6. À gauche, une primitive de $t \mapsto (1+t)^n$ est $t \mapsto \frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}$; à droite, par linéarité, chaque terme t^k s'intègre en $\frac{x^{k+1}}{k+1}$:

$$\int_0^x (1+t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}}$$

Cas particuliers. Pour $x = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; pour $n = 2$, par exemple, $1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Pour $x = -1$, la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$ vaut $-\frac{1}{n+1}$.

Remarque. On peut aussi éviter l'intégration. D'après la question 4 de l'exercice 20 appliquée à $n+1$ et $k+1$, on a $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$, et la somme devient $\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j$, que la formule du binôme appliquée à $(1+x)^{n+1}$ permet de reconnaître. Les deux méthodes, l'une analytique et l'autre combinatoire, se confirment mutuellement.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆⋆

1. Considérons un groupe de $2n$ personnes, formé de n filles et de n garçons, dans lequel on choisit un comité de n personnes. Il y a $\binom{2n}{n}$ comités. Comptons-les autrement, selon le nombre k de filles qu'ils contiennent, qui varie de 0 à n. Un comité à k filles s'obtient en choisissant k filles parmi n, puis $n-k$ garçons parmi n : il y en a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$, par symétrie. Ces cas étant deux à deux disjoints, le principe additif donne :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Vérification : pour $n = 3$, $1 + 9 + 9 + 1 = 20 = \binom{6}{3}$.

2. Le même raisonnement s'applique à un groupe de m filles et n garçons, dans lequel on choisit un comité de k personnes : il y en a $\binom{m+n}{k}$. Un comité contenant j filles contient $k-j$ garçons ;

comme $k \leqslant m$ et $k \leqslant n$, l'entier j peut prendre toutes les valeurs de 0 à k, et il y a $\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ tels comités.

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}}$$

La question 1 est le cas $m = n = k$.

3. D'après la formule du binôme, le coefficient de x^n dans $(1+x)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$. D'autre part,

$$((1+x)^n)^2 = \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)$$

En développant ce produit, on obtient un terme en x^n pour chaque couple d'indices tels que $i + j = n$, c'est-à-dire $i = n - j$, avec j variant de 0 à n ; le coefficient de x^n vaut donc $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2$. Les deux expressions étant égales pour tout réel x, leurs coefficients de x^n sont égaux, ce qui redonne le résultat de la question 1.

Remarque. Les deux démonstrations ne se ressemblent pas, mais elles disent la même chose : développer un produit de deux puissances de $(1+x)$, c'est choisir une partie dans chacun de deux groupes. Les identités de ce type portent le nom de Vandermonde, qui les a publiées au XVIII$^{\text{e}}$ siècle.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆⋆

Modélisation. Les choix successifs de poche sont indépendants, et chacun vaut « gauche » ou « droite » avec probabilité $\frac{1}{2}$. Une suite donnée de L choix a donc la probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^L$, comme pour la loi binomiale du chapitre 2. Le mathématicien se rend compte qu'une boîte est vide au moment où il la choisit alors qu'elle ne contient plus d'allumette, c'est-à-dire lorsqu'il la choisit pour la $(n+1)$-ième fois.

Le cas où la boîte de gauche est découverte vide. Soit $k \in \{0\,;\ldots\,;n\}$. L'événement « il découvre la boîte de gauche vide alors que la boîte de droite contient k allumettes » se produit exactement lorsque :

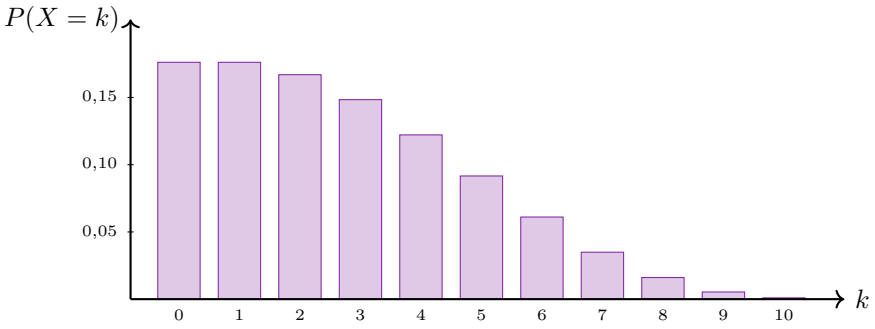
- le dernier choix est le $(n+1)$-ième choix de la poche gauche ;
- auparavant, il a choisi n fois la gauche et $n-k$ fois la droite, dans un ordre quelconque.

Les choix effectués sont donc au nombre de $L = (n+1) + (n-k) = 2n - k + 1$, le dernier étant imposé. Parmi les $2n-k$ premiers, il faut placer les n choix « gauche » : il y a $\binom{2n-k}{n}$ façons de le faire. On remarque qu'aucune de ces suites ne s'arrête trop tôt, car la boîte de droite n'a été choisie que $n - k \leqslant n$ fois et n'a donc jamais été découverte vide. Chacune de ces suites ayant la probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$, l'événement a pour probabilité $\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$.

Conclusion. Le cas où la boîte de droite est découverte vide est symétrique et a la même probabilité, et les deux cas sont incompatibles. En additionnant :

$$\boxed{\text{pour } 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad P(X=k) = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}}$$

Vérification : pour $n = 1$, la formule donne $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$. En effet, s'il choisit deux fois de suite la même poche, il découvre au second choix que cette boîte est vide alors que l'autre est pleine $(X=1)$; sinon, il a vidé les deux boîtes et découvre la première vide au troisième choix $(X=0)$. Pour $n = 5$, une simulation de 200 000 expériences en Python a donné des fréquences qui s'écartent de moins de 0,002 des valeurs de la formule.



Ce diagramme représente la loi de X pour $n = 10$: les petites valeurs de k sont les plus probables, et il est très rare qu'il reste beaucoup d'allumettes dans l'autre boîte.

Remarque. Il est remarquable que $P(X = 0) = P(X = 1)$ pour tout n : la formule donne $\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$ et $\binom{2n-1}{n}\frac{1}{2^{2n-1}}$, et l'on a $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n}$ d'après la question 4 de l'exercice 20 et la propriété de symétrie. On peut enfin vérifier que la somme des probabilités vaut 1 pour les petites valeurs de n ; la démontrer en général est un exercice de calcul plus difficile.