EXERCICES – CHAPITRE 7

DÉNOMBREMENT

Cardinal et principes de base

EXERCICE 1 ⋆

Déterminer le cardinal de chacun des ensembles suivants.

1. $A = \{1\,;2\,;3\,;\ldots\,;20\}$
2. B est l'ensemble des diviseurs positifs de 36.
3. C est l'ensemble des entiers pairs compris entre 1 et 100.
4. D est l'ensemble des lettres distinctes du mot DENOMBREMENT.
5. E est l'ensemble des multiples de 7 compris entre 1 et 200.
6. $F = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leqslant 50\}$

EXERCICE 2 ⋆

1. On donne $\text{Card}(A) = 15$, $\text{Card}(B) = 12$ et $\text{Card}(A \cap B) = 5$. Calculer $\text{Card}(A \cup B)$.
2. On donne $\text{Card}(A) = 20$, $\text{Card}(B) = 13$ et $A \cap B = \varnothing$. Calculer $\text{Card}(A \cup B)$.
3. On donne $\text{Card}(A \cup B) = 40$, $\text{Card}(A) = 25$ et $\text{Card}(B) = 22$. Calculer $\text{Card}(A \cap B)$.
4. A est une partie d'un ensemble E de cardinal 50, avec $\text{Card}(A) = 18$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Justifier que $\text{Card}(\overline{A}) = 32$.
   On remarquera que A et $\overline{A}$ sont disjoints et que leur réunion est E.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Dans une classe de 32 élèves, 18 pratiquent un sport en club, 14 font de la musique, et 6 font les deux.

1. Représenter la situation par un diagramme.
2. Combien d'élèves pratiquent un sport *ou* de la musique ?
3. Combien d'élèves ne pratiquent ni l'un ni l'autre ?
4. Combien d'élèves font uniquement du sport ? uniquement de la musique ?
5. Vérifier que les quatre catégories obtenues à la question 4 et à la question 3, ainsi que les élèves faisant les deux activités, totalisent bien 32 élèves.

EXERCICE 4 ⋆

Dans chaque cas, dénombrer les possibilités à l'aide du principe multiplicatif.

1. Un restaurant propose 3 entrées, 5 plats et 4 desserts. Combien de menus complets peut-on composer ?
2. Une penderie contient 6 pantalons, 8 chemises et 3 vestes. Combien de tenues différentes peut-on former ?
3. Une plaque d'immatriculation est composée de deux lettres, puis de trois chiffres, puis de deux lettres. Combien de plaques différentes existe-t-il ?

4. Un questionnaire comporte 10 questions, chacune offrant 4 réponses possibles dont une seule doit être cochée. Combien de grilles de réponses différentes peut-on remplir ?

EXERCICE 5 ⋆

1. On lance une pièce trois fois de suite et l'on note à chaque fois le résultat.
   (a) Construire l'arbre représentant cette expérience.
   (b) Combien de chemins complets comporte-t-il ? Retrouver ce nombre par le principe multiplicatif.
   (c) Combien de chemins comportent exactement deux « pile » ?
2. On lance successivement un dé à six faces puis une pièce.
   (a) Construire l'arbre correspondant.
   (b) Combien d'issues cette expérience comporte-t-elle ?

EXERCICE 6 ⋆⋆

On s'intéresse aux nombres entiers de trois chiffres, c'est-à-dire compris entre 100 et 999.

1. Combien y a-t-il de tels nombres ? On justifiera par le principe multiplicatif, en précisant le nombre de choix pour chaque chiffre.
2. Combien sont pairs ?
3. Combien ont leurs trois chiffres distincts ?
4. Combien sont pairs *et* ont leurs trois chiffres distincts ?
   On distinguera deux cas selon que le chiffre des unités est 0 *ou non : la contrainte sur le premier chiffre n'est pas la même.*

Listes et p-uplets

EXERCICE 7 ⋆

Dénombrer les possibilités dans chacune des situations suivantes, en identifiant à chaque fois l'ensemble de départ et la longueur de la liste.

1. Un code d'accès formé de 4 chiffres.
2. Un mot de passe de 6 caractères choisis parmi les 26 lettres majuscules et les 10 chiffres.
3. Un tirage successif **avec remise** de 5 boules dans une urne en contenant 8.
4. Un « mot » de 3 lettres, ayant un sens ou non.
5. Les réponses possibles à un questionnaire de 12 questions offrant chacune 3 choix.

EXERCICE 8 ⋆⋆

On considère les codes formés de 4 chiffres. Combien y en a-t-il :

1. au total ?
2. commençant par 0 ?
3. ne contenant aucun 0 ?
4. contenant au moins un 0 ?
   On passera par l'événement contraire plutôt que de dénombrer directement.

5. dont tous les chiffres sont pairs ?
6. se terminant par 7 ?

EXERCICE 9 ⋆⋆

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont 4 rouges et 6 vertes. On tire successivement, **avec remise**, 5 boules de cette urne.

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
2. Combien de tirages ne contiennent aucune boule rouge ?
3. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge.
4. Les tirages étant équiprobables, en déduire la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge. On donnera une valeur approchée au millième.
5. Retrouver ce dernier résultat à l'aide de la loi binomiale rencontrée au chapitre 2.

Permutations et arrangements

EXERCICE 10 ⋆

1. Calculer 5!, 7!, 1! et 0!.
2. Simplifier les quotients suivants sans calculatrice.

   (a) $\dfrac{8!}{6!}$ (b) $\dfrac{10!}{8!}$ (c) $\dfrac{100!}{98!}$ (d) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$.
4. Déterminer l'entier n tel que $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 42$.

EXERCICE 11 ⋆

1. De combien de façons peut-on ranger 5 livres différents sur une étagère ?
2. De combien de façons 8 personnes peuvent-elles se placer en file d'attente ?
3. Combien d'anagrammes le mot CHIEN possède-t-il ? Et le mot JUPITER ?
   Toutes les lettres de ces deux mots sont distinctes ; une anagramme n'a pas besoin d'avoir un sens.
4. Quatre équipes disputent un tournoi sans match nul. Combien de classements finaux différents sont possibles ?

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Six personnes, dont Alice et Bob, s'installent en file.
   (a) Combien y a-t-il de dispositions au total ?
   (b) Combien de dispositions placent Alice et Bob côte à côte ?
   On pourra considérer qu'Alice et Bob forment un seul bloc, sans oublier qu'ils peuvent s'échanger à l'intérieur de ce bloc.
   (c) En déduire le nombre de dispositions où ils ne sont pas côte à côte.

2. Trois filles et trois garçons s'installent en file, en alternant les sexes. Combien de dispositions sont possibles ?
3. On range 5 livres sur une étagère, dont 2 livres de mathématiques qui doivent rester l'un à côté de l'autre. Combien de rangements sont possibles ?

EXERCICE 13 ⋆

Dénombrer les possibilités dans chacune des situations suivantes.

1. Le tiercé dans l'ordre d'une course de 20 chevaux.
2. Le podium d'une finale réunissant 12 athlètes.
3. L'élection d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier parmi 25 adhérents.
4. Un code formé de 4 chiffres tous distincts.
5. Un sigle formé de 3 lettres toutes distinctes.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Un club compte 25 membres, parmi lesquels M. Dupont. On élit un bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier, ces trois fonctions étant occupées par trois personnes différentes.

1. Combien de bureaux différents peut-on former ?
2. Combien de bureaux ont M. Dupont pour président ?
3. Combien de bureaux comportent M. Dupont, quelle que soit sa fonction ?
4. Combien de bureaux ne comportent pas M. Dupont ?
5. Vérifier la cohérence des questions 1, 3 et 4.

EXERCICE 15 ⋆⋆

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en prélève 4. Dénombrer les résultats possibles selon le mode de tirage.

1. Tirage successif **avec** remise, en tenant compte de l'ordre.
2. Tirage successif **sans** remise, en tenant compte de l'ordre.
3. Tirage **simultané** des 4 boules.
4. Vérifier que le résultat de la question 2 est égal à celui de la question 3 multiplié par 4!, et expliquer pourquoi.

Combinaisons

EXERCICE 16 ⋆

Calculer les coefficients binomiaux suivants, sans calculatrice lorsque c'est possible.

a) $\binom{5}{2}$ c) $\binom{7}{7}$ e) $\binom{8}{3}$ g) $\binom{20}{18}$

b) $\binom{7}{0}$ d) $\binom{10}{1}$ f) $\binom{6}{4}$ h) $\binom{12}{5}$

Pour g), on utilisera la propriété de symétrie plutôt que la formule factorielle.

EXERCICE 17 ⋆

Dénombrer les possibilités dans chacune des situations suivantes. On justifiera à chaque fois que l'ordre n'intervient pas.

1. Un comité de 4 personnes choisi parmi 20 candidats.
2. Une main de 5 cartes dans un jeu de 32.
3. Une grille de 6 numéros cochés parmi 49.
4. Une délégation de 3 élèves choisie dans une classe de 15.
5. Le choix de 2 exercices parmi les 8 d'un devoir.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Une classe compte 30 élèves, dont 18 filles et 12 garçons. On forme un groupe de travail de 5 élèves.

1. Combien de groupes différents peut-on former ?
2. Combien de groupes ne comportent que des filles ?
3. Combien de groupes comportent exactement 3 filles et 2 garçons ?
4. Combien de groupes comportent au moins un garçon ?
5. Combien de groupes comportent exactement un garçon ?

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Vérifier par le calcul que $\binom{9}{3} = \binom{9}{6}$.
2. Vérifier par le calcul la relation de Pascal $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$.
3. Construire les huit premières lignes du triangle de Pascal, c'est-à-dire celles allant de $n = 0$ à $n = 7$.
4. Y lire les valeurs de $\binom{6}{2}$ et de $\binom{7}{4}$.
5. Calculer la somme des coefficients de chaque ligne. Quelle conjecture peut-on formuler ?

EXERCICE 20 ⋆⋆

Dans cet exercice, n et p désignent deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Toutes les démonstrations se mènent à partir de la formule $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

1. Démontrer que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.
2. Démontrer la propriété de symétrie $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
3. Démontrer la relation de Pascal, pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$:
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$
4. Démontrer que pour $1 \leqslant p \leqslant n$:
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

5. Interpréter cette dernière égalité : de combien de façons peut-on choisir un comité de p personnes parmi n, puis désigner son président ?

EXERCICE 21 ⋆⋆

On considère un jeu de 32 cartes, comportant 4 as et 8 cartes de chaque couleur. On tire simultanément 5 cartes : un tel tirage s'appelle une *main*.

1. Combien de mains différentes peut-on obtenir ?
2. Combien de mains contiennent exactement deux as ?
3. Combien de mains ne contiennent aucun as ?
4. En déduire le nombre de mains contenant au moins un as.
5. Combien de mains contiennent les quatre as ?
6. Combien de mains ne sont composées que de cœurs ?

EXERCICE 22 ⋆⋆

Pour chacune des situations suivantes, préciser s'il s'agit d'un p-uplet, d'une permutation, d'un arrangement ou d'une combinaison, puis effectuer le dénombrement. On justifiera en répondant aux deux questions du récapitulatif du cours : *les répétitions sont-elles autorisées ? l'ordre compte-t-il ?*

1. Un code d'accès formé de 5 chiffres.
2. Le podium d'une course réunissant 10 concurrents.
3. L'élection de 3 délégués parmi 30 élèves, sans distinction de rôle.
4. Le rangement de 7 livres sur une étagère.
5. Le tirage successif avec remise de 4 boules dans une urne en contenant 15.
6. Une main de 5 cartes dans un jeu de 52.
7. Une plaque formée de 2 lettres distinctes suivies de 3 chiffres distincts.
8. Le tirage successif sans remise de 3 jetons parmi 10.

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. Le nombre de 3-uplets d'un ensemble à 5 éléments est :	15	125	60
2. 6! vaut :	36	720	120
3. A_7^2 vaut :	42	21	49
4. $\binom{9}{2}$ vaut :	72	36	18
5. $\binom{10}{7}$ est égal à :	$\binom{10}{3}$	$\binom{7}{10}$	$\binom{10}{17}$
6. On tire successivement et sans remise 3 cartes d'un jeu de 32. Le nombre de tirages est :	32^3	A_{32}^3	$\binom{32}{3}$
7. On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32. Le nombre de tirages est :	32^3	A_{32}^3	$\binom{32}{3}$
8. $\binom{n}{0}$ vaut :	0	1	n
9. Le nombre d'anagrammes du mot ORANGE est :	6	36	720
10. Dans une classe de 30 élèves, le nombre de façons de choisir 2 délégués sans distinction de rôle est :	870	435	900

EXERCICE 24 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $n! = n \times (n-1)!$.
2. $0! = 0$.
3. Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
4. Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, $A_n^p = p! \times \binom{n}{p}$.
5. Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

6. Lorsque l'ordre ne compte pas et qu'aucune répétition n'est possible, on dénombre à l'aide d'un arrangement.
7. Pour tous ensembles finis A et B, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
8. Pour tous entiers convenables, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
9. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égal à A_n^n.
10. Un tirage simultané de p objets parmi n se dénombre à l'aide d'un arrangement.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 rouges et 6 vertes. On tire **simultanément** 3 boules de l'urne, et l'on suppose tous les tirages équiprobables.

1. Justifier que le nombre de tirages possibles est 120.
2. Calculer la probabilité de l'événement R : « les trois boules tirées sont rouges ».
3. Calculer la probabilité de l'événement D : « exactement deux boules sont rouges ».
4. Calculer la probabilité de l'événement M : « au moins une boule est rouge ».
   On passera par l'événement contraire.
5. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X, sous forme de tableau, et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
6. Calculer l'espérance $E(X)$.
7. Comparer $E(X)$ au produit $3 \times \dfrac{4}{10}$. Ce résultat est-il une coïncidence ? Le tirage suit-il pour autant une loi binomiale ?

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

Un code d'accès est formé de 6 caractères, chacun choisi parmi les 26 lettres majuscules et les 10 chiffres.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien de codes ne comportent que des lettres ?
3. En déduire le nombre de codes comportant au moins un chiffre.
4. Combien de codes ont leurs six caractères deux à deux distincts ?
5. Un code est choisi au hasard, tous les codes étant équiprobables. Calculer la probabilité qu'il ait tous ses caractères distincts. On donnera une valeur approchée au millième.
6. Combien de codes commencent par une lettre et se terminent par un chiffre ?
7. Un logiciel teste 10^6 codes par seconde. Combien de temps lui faudrait-il, au pire, pour tous les essayer ? On donnera le résultat en minutes, arrondi à l'unité. Que penser de la sécurité d'un tel code ?

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

Une association compte 24 membres : 15 femmes et 9 hommes. Elle élit un conseil de 5 personnes, tous les conseils possibles étant équiprobables.

1. Combien de conseils différents peut-on former ?
2. Combien de conseils ne sont composés que de femmes ?

3. Combien de conseils comportent exactement 3 femmes et 2 hommes ?
4. Combien de conseils comportent au moins une femme ?
5. Calculer la probabilité que le conseil élu comporte exactement 3 femmes. On donnera une valeur approchée au millième.
6. Une fois le conseil élu, ses 5 membres se répartissent trois fonctions distinctes : président, vice-président et trésorier. Combien de répartitions sont possibles pour un conseil donné ?
7. En déduire le nombre total de configurations finales possibles.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

Au Loto, une grille consiste à cocher 5 numéros parmi 49, puis un « numéro chance » parmi 10. L'ordre dans lequel les numéros sont cochés n'intervient pas.

1. Justifier que le nombre de grilles différentes est $\binom{49}{5} \times 10$, puis en donner la valeur.
2. Un joueur remplit une grille au hasard. Quelle est la probabilité qu'il obtienne le gros lot, c'est-à-dire les 5 bons numéros et le bon numéro chance ?
3. On ne s'intéresse désormais qu'aux 5 numéros, le numéro chance étant ignoré. Combien de grilles comportent exactement 4 bons numéros ?
   Il faut choisir 4 *numéros parmi les* 5 *gagnants, et* 1 *parmi les* 44 *perdants.*
4. Combien de grilles comportent exactement 3 bons numéros ?
5. En déduire la probabilité qu'une grille comporte au moins 3 bons numéros. On donnera une valeur approchée à 10^{-6} près.
6. Le joueur affirme : « en cochant 10 numéros au lieu de 5, je multiplie mes chances par 2 ». Que penser de cette affirmation ?
   On pourra dénombrer les grilles de 5 *numéros contenues dans une sélection de* 10.

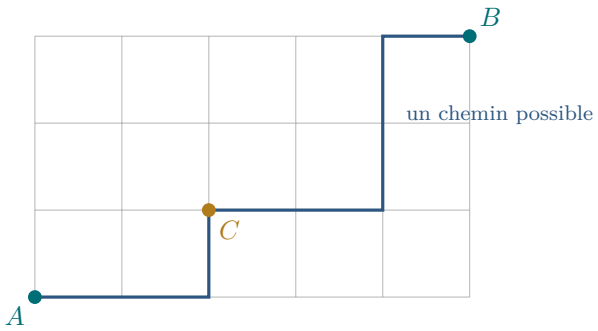
EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On cherche à dénombrer les *parties* de E, c'est-à-dire les sous-ensembles de E, y compris $\varnothing$ et E lui-même.

1. Pour $E = \{a\,;b\,;c\}$, écrire la liste de toutes les parties de E. Combien y en a-t-il ?
2. Choisir une partie de E, c'est décider pour chacun des n éléments s'il appartient ou non à cette partie. En déduire que le nombre de parties de E est 2^n.
   On reconnaîtra un n*-uplet d'un ensemble à deux éléments.*
3. Dénombrons autrement. Combien E possède-t-il de parties de cardinal p ? En déduire que :
$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$
4. Vérifier cette égalité pour $n = 4$ à l'aide du triangle de Pascal.
5. Combien un ensemble à 10 éléments possède-t-il de parties ?
6. Pour $n = 4$, puis pour $n = 5$, dénombrer les parties de cardinal *pair*. Quelle conjecture peut-on formuler ?
7. Combien E possède-t-il de parties non vides et différentes de E ?

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Un livreur se déplace dans une ville quadrillée. Il part du point A et doit rejoindre le point B, en n'avançant qu'**vers la droite** ou **vers le haut**, le long des lignes du quadrillage.



1. Justifier que tout chemin de A à B comporte exactement 8 déplacements, dont 5 vers la droite.
2. Un chemin est donc entièrement déterminé par le choix des étapes qui seront des déplacements vers la droite. En déduire le nombre de chemins possibles.
3. Retrouver ce résultat en inscrivant sur chaque nœud du quadrillage le nombre de chemins permettant de l'atteindre depuis A. Quel lien observe-t-on avec le triangle de Pascal ?
4. Combien de chemins passent par le point C ?
   On décomposera le trajet en deux étapes indépendantes.
5. En déduire le nombre de chemins évitant C.
6. Généraliser : combien existe-t-il de chemins allant de l'origine au point de coordonnées $(p\,;q)$?

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit n un entier naturel non nul.

1. Donner une forme simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times k!$. On pourra utiliser l'égalité $k\times k! = (k+1)! - k!$.
2. Par une méthode analogue, donner une forme simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Soit n un entier naturel non nul. Quelle est la moyenne des cardinaux des parties de $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$?

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

On lance trois dés non pipés. Montrer que la probabilité d'amener un total inférieur ou égal à 10 est $\dfrac{1}{2}$. On essaiera de donner un argument ne nécessitant aucun calcul.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Monotonie des coefficients binomiaux. Soit n un entier naturel non nul, et m le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{n}{2}$.

1. Pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$, comparer le quotient $\dbinom{n}{p+1} \Big/ \dbinom{n}{p}$ à 1.

2. En déduire que
$$\binom{n}{0} \leqslant \binom{n}{1} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{m}$$

3. En considérant la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, montrer que
$$\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{m} \leqslant 2^n$$

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

La formule du binôme.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et pour tous réels a et b :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

3. On note A_n (resp. B_n) la somme des $\binom{n}{k}$ pour k décrivant l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs) de $\{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$:
$$A_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots \qquad B_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A_n = B_n = 2^{n-1}$.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆⋆

Identités de Vandermonde. Soit n un entier naturel.

1. Établir par un raisonnement combinatoire que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. Plus généralement, soient m, n et k trois entiers naturels tels que $k \leqslant m$ et $k \leqslant n$. Montrer que
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$$

3. Retrouver le résultat de la question 1 en comparant les coefficients de x^n dans les deux membres de l'égalité $(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2$, développés à l'aide de la formule du binôme (exercice 35). On admettra que deux expressions polynomiales égales pour tout réel x ont les mêmes coefficients.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆⋆

Problème des boîtes d'allumettes de Banach. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$. Un mathématicien a deux boîtes de n allumettes, une dans chaque poche. Chaque fois qu'il fume, il choisit au hasard une poche avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, jusqu'à se rendre compte que l'une des deux boîtes est vide. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte à cet instant. Déterminer la loi de X.