CORRIGÉ – CHAPITRE 8

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Notion d'équation différentielle

EXERCICE 1 ⋆

La méthode est toujours la même : on calcule $f'(x)$, on calcule le second membre en remplaçant y par $f(x)$, et l'on compare.

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^{4x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 3 \times 4\mathrm{e}^{4x} = 12\mathrm{e}^{4x} \quad ; \quad 4f(x) = 4 \times 3\mathrm{e}^{4x} = 12\mathrm{e}^{4x}$$

Les deux expressions coïncident pour tout réel x : $\boxed{f \text{ est solution de } y' = 4y}$

2.

$$f'(x) = -2 \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad -f(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{f \text{ est solution de } y' = -y}$$

3.

$$f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} \quad ; \quad 3f(x) - 3 = 3\left(\mathrm{e}^{3x} + 1\right) - 3 = 3\mathrm{e}^{3x} + 3 - 3 = 3\mathrm{e}^{3x}$$

$$\boxed{f \text{ est solution de } y' = 3y - 3}$$

4.

$$f'(x) = 4 \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = -8\mathrm{e}^{-2x}$$

$$-2f(x) + 10 = -2\left(4\mathrm{e}^{-2x} + 5\right) + 10 = -8\mathrm{e}^{-2x} - 10 + 10 = -8\mathrm{e}^{-2x}$$

$$\boxed{f \text{ est solution de } y' = -2y + 10}$$

5. On dérive le produit :

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times 2\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x}$$

$$2f(x) + \mathrm{e}^{2x} = 2x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}$$

$$\boxed{f \text{ est solution de } y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}}$$

EXERCICE 2 ⋆

Fonction	$f'(x)$	$-3f(x)$	**Solution ?**
$f_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}$	$-3\mathrm{e}^{-3x}$	$-3\mathrm{e}^{-3x}$	**oui**
$f_2(x) = -3\mathrm{e}^{x}$	$-3\mathrm{e}^{x}$	$9\mathrm{e}^{x}$	non
$f_3(x) = 5\mathrm{e}^{-3x}$	$-15\mathrm{e}^{-3x}$	$-15\mathrm{e}^{-3x}$	**oui**
$f_4(x) = \mathrm{e}^{3x}$	$3\mathrm{e}^{3x}$	$-3\mathrm{e}^{3x}$	non
$f_5(x) = 0$	0	0	**oui**
$f_6(x) = \mathrm{e}^{-3x} + 1$	$-3\mathrm{e}^{-3x}$	$-3\mathrm{e}^{-3x} - 3$	non

$$\boxed{\text{Seules } f_1,\ f_3 \text{ et } f_5 \text{ sont solutions de } y' = -3y}$$

Ces trois fonctions sont bien de la forme Ce^{-3x}, avec respectivement $C = 1$, $C = 5$ et $C = 0$: elles correspondent exactement à la description du théorème 1. La fonction f_6 montre qu'ajouter une constante détruit la propriété : c'est le second membre qui distingue $y' = ay$ de $y' = ay + b$.

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. $f(x) = e^{kx}$ donne $f'(x) = ke^{kx}$, tandis que $5f(x) = 5e^{kx}$. L'égalité pour tout x impose $k = 5$:

$$\boxed{k = 5}$$

2. $f(x) = ae^{2x} + b$ donne $f'(x) = 2ae^{2x}$, et :

$$2f(x) - 8 = 2ae^{2x} + 2b - 8$$

L'égalité pour tout x impose $2b - 8 = 0$, soit $b = 4$, sans aucune condition sur a :

$$\boxed{b = 4 \text{ et } a \text{ quelconque : il y a une infinité de possibilités}}$$

On retrouve la forme $Ce^{2x} + 4$ du théorème 3, avec $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-8}{2} = 4$.

3. $$f(1) = Ce^{-2} = 6 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C = 6e^2}$$

4. On dérive le produit :

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x + m)e^x = (x + m + 1)e^x$$

$$f(x) + e^x = (x + m)e^x + e^x = (x + m + 1)e^x$$

Les deux expressions sont égales quelle que soit la valeur de m :

$$\boxed{\text{Toute valeur de } m \text{ convient}}$$

Ce n'est pas surprenant : les fonctions $x \mapsto (x + m)e^x$ s'écrivent $xe^x + me^x$, c'est-à-dire une solution particulière à laquelle on ajoute me^x, solution de $y' = y$. C'est exactement la structure décrite dans le cours.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. $f(x) = x^2e^{-x}$:

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$$

$$-f(x) + 2xe^{-x} = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$$

$$\boxed{f \text{ est solution de } y' = -y + 2xe^{-x}}$$

2. $f(x) = (2x + 1)e^{3x}$:

$$f'(x) = 2e^{3x} + 3(2x + 1)e^{3x}$$

$$3f(x) + 2e^{3x} = 3(2x + 1)e^{3x} + 2e^{3x}$$

$$\boxed{f \text{ est solution de } y' = 3y + 2e^{3x}}$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. Le dénominateur est strictement positif, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En posant $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-x}$, on a $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $f = \dfrac{1}{u}$, dont la dérivée est $-\dfrac{u'}{u^2}$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

Par ailleurs :

$$1 - f(x) = \frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

d'où :

$$f(x)(1-f(x)) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \times \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

$$\boxed{f \text{ est solution de } y' = y(1-y)}$$

L'équation $y' = ay$

EXERCICE 5 ⋆

D'après le théorème 1, les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

	Équation	**Forme $y' = ay$**	**Solutions**
a)	$y' = 3y$	$a = 3$	$x \mapsto C\mathrm{e}^{3x}$
b)	$y' = -2y$	$a = -2$	$x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$
c)	$y' = 0{,}5\,y$	$a = 0{,}5$	$x \mapsto C\mathrm{e}^{0{,}5x}$
d)	$y' + 4y = 0$	$y' = -4y$, $a = -4$	$x \mapsto C\mathrm{e}^{-4x}$
e)	$2y' = 6y$	$y' = 3y$, $a = 3$	$x \mapsto C\mathrm{e}^{3x}$
f)	$3y' + y = 0$	$y' = -\frac{1}{3}y$, $a = -\frac{1}{3}$	$x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$

On notera que a) et e) sont la même équation : diviser les deux membres par 2 ne change ni l'équation ni ses solutions.

EXERCICE 6 ⋆

a) Les solutions sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$. La condition donne $C\mathrm{e}^0 = C = 5$:

$$\boxed{f(x) = 5\mathrm{e}^{2x}}$$

b) Les solutions sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, et $C = -3$: $\boxed{f(x) = -3\mathrm{e}^{-x}}$

c) Les solutions sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{3x}$. La condition s'écrit $C\mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^3$, donc $C = 1$: $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{3x}}$

d) Les solutions sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}5x}$. La condition donne $C\mathrm{e}^{-1} = 4$, donc $C = 4\mathrm{e}$:

$$f(x) = 4\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-0{,}5x} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f(x) = 4\mathrm{e}^{1-0{,}5x}}$$

e) L'équation s'écrit $y' = -5y$, de solutions $x \mapsto Ce^{-5x}$, et $C = 2$: $\boxed{f(x) = 2e^{-5x}}$

f) Les solutions sont $x \mapsto Ce^{4x}$. La condition donne $Ce^{-4} = 1$, donc $C = e^4$:

$$\boxed{f(x) = e^{4x+4}}$$

EXERCICE 7 ⋆⋆

a) $4y' - 8y = 0 \iff 4y' = 8y \iff y' = 2y$: $\boxed{x \mapsto Ce^{2x}}$

b) $5y' + 2y = 0 \iff y' = -\dfrac{2}{5}y = -0{,}4\,y$: $\boxed{x \mapsto Ce^{-0{,}4x}}$

c) $\dfrac{y'}{2} = -3y \iff y' = -6y$: $\boxed{x \mapsto Ce^{-6x}}$

d) $2y' - y = 0 \iff y' = 0{,}5\,y$, de solutions $x \mapsto Ce^{0{,}5x}$. La condition $y(0) = 7$ donne $C = 7$:

$$\boxed{f(x) = 7e^{0{,}5x}}$$

Le réflexe est toujours le même : **isoler y' seul dans le membre de gauche**, en divisant par son coefficient. C'est seulement alors que l'on peut lire a.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. f est de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$. La condition $f(0) = 2$ donne $C = 2$, puis :

$$f(1) = 2e^a = 2e^3 \iff e^a = e^3 \iff \boxed{a = 3}$$

$$\boxed{f(x) = 2e^{3x}}$$

2. De même $g(0) = 1$ donne $C = 1$, puis :

$$g(2) = e^{2a} = e^{-6} \iff 2a = -6 \iff \boxed{a = -3}$$

3. En notant $N(t) = Ce^{at}$ la population, l'hypothèse de doublement s'écrit $N(t+10) = 2N(t)$ pour tout t, soit :

$$Ce^{a(t+10)} = 2\,Ce^{at} \iff e^{at} \times e^{10a} = 2\,e^{at} \iff e^{10a} = 2$$

En appliquant le logarithme népérien :

$$10a = \ln 2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{a = \frac{\ln 2}{10} \approx 0{,}0693}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Ici $a = 0{,}5$, donc d'après le théorème 1 :

$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } x \mapsto Ce^{0{,}5x}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$$

2. Comme $f(0) = Ce^0 = C$, la constante C se lit directement comme l'ordonnée du point d'abscisse 0.

$$\boxed{\mathcal{C}_1 : C = 2 \quad ; \quad \mathcal{C}_2 : C = 1 \quad ; \quad \mathcal{C}_3 : C = -1 \quad ; \quad \mathcal{C}_4 : C = -3}$$

3. La condition $f(0) = 4$ donne $C = 4$: $\boxed{f(x) = 4e^{0{,}5x}}$

4. Non. D'après le théorème 2, par tout point $(x_0\,;y_0)$ du plan passe une *unique* solution. Si deux courbes intégrales se coupaient en un point, il y aurait deux solutions distinctes vérifiant la même condition initiale, ce qui contredirait ce théorème.

$$\boxed{\text{Deux courbes intégrales distinctes ne se coupent jamais}}$$

5. Oui : la valeur $C = 0$ donne la fonction nulle, dont la dérivée est nulle et qui vérifie bien $y' = 0{,}5 \times 0$.

$$\boxed{\text{La fonction nulle est l'unique solution constante}}$$

Sa courbe est l'axe des abscisses lui-même : elle n'a pas été tracée en couleur puisqu'elle se confond avec cet axe.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. Les solutions de $y' = -4y$ sont $x \mapsto Ce^{-4x}$, et $f(0) = C = 5$:

$$\boxed{f(x) = 5e^{-4x}}$$

2. $$f'(x) = 5 \times (-4)e^{-4x} = -20e^{-4x}$$

Comme l'exponentielle est strictement positive, $f'(x) < 0$ pour tout x :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$$

3. Comme $-4 < 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-4x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-4x} = +\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

4. Non : $f(x) = 5e^{-4x}$ est un produit d'un réel non nul par une exponentielle, qui ne s'annule jamais.

$$\boxed{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}}$$

C'est un phénomène général : une solution non nulle de $y' = ay$ garde un signe constant.

5. $$5e^{-4x} = 1 \iff e^{-4x} = \frac{1}{5} \iff -4x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln 5$$

$$\boxed{x = \frac{\ln 5}{4} \approx 0{,}402}$$

6. Les solutions de $y' = 3y$ sont $x \mapsto Ce^{3x}$, et $g(0) = -2$ donne $g(x) = -2e^{3x}$. Alors $g'(x) = -6e^{3x} < 0$: $\boxed{g \text{ est strictement décroissante}}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0}$$

$$\boxed{\text{Le signe de } a \text{ décide du côté où la solution tend vers } 0 : \text{ en } +\infty \text{ si } a < 0, \text{ en } -\infty \text{ si } a > 0}$$

Le signe de C, lui, ne fait que décider si la courbe est au-dessus ou en dessous de l'axe.

L'ÉQUATION $y' = ay + b$

EXERCICE 11 ⋆

D'après le théorème 3, les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

	Équation	a	$-\dfrac{b}{a}$	Solutions
a)	$y' = 2y + 6$	2	-3	$x \mapsto Ce^{2x} - 3$
b)	$y' = -y + 4$	-1	4	$x \mapsto Ce^{-x} + 4$
c)	$y' = 3y - 12$	3	4	$x \mapsto Ce^{3x} + 4$
d)	$y' = -0{,}5\,y + 2$	$-0{,}5$	4	$x \mapsto Ce^{-0{,}5x} + 4$
e)	$y' = 5y + 1$	5	$-\dfrac{1}{5}$	$x \mapsto Ce^{5x} - \dfrac{1}{5}$
f)	$y' = -2y - 6$	-2	-3	$x \mapsto Ce^{-2x} - 3$

On prendra garde aux signes : en a), $b = 6$ et $a = 2$, donc $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{6}{2} = -3$, et la constante s'*ajoute* sous la forme -3.

EXERCICE 12 ⋆

a) Ici $a = 3$ et $b = -6$, donc $-\dfrac{b}{a} = 2$ et les solutions sont $x \mapsto Ce^{3x} + 2$. La condition $y(0) = 4$ donne :

$$C + 2 = 4 \iff C = 2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f(x) = 2e^{3x} + 2}$$

b) $a = -1$, $b = 2$, donc $-\dfrac{b}{a} = 2$ et les solutions sont $x \mapsto Ce^{-x} + 2$. La condition donne $C + 2 = 5$, soit $C = 3$:

$$\boxed{f(x) = 3e^{-x} + 2}$$

c) $a = -0{,}2$, $b = 1$, donc $-\dfrac{b}{a} = 5$. La condition donne $C + 5 = 10$, soit $C = 5$:

$$\boxed{f(x) = 5e^{-0{,}2x} + 5}$$

d) $a = 4$, $b = 8$, donc $-\dfrac{b}{a} = -2$ et les solutions sont $x \mapsto Ce^{4x} - 2$. La condition $y(1) = 0$ donne :

$$Ce^4 - 2 = 0 \iff C = \frac{2}{e^4} = 2e^{-4}$$

$$f(x) = 2e^{-4} \times e^{4x} - 2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f(x) = 2e^{4x-4} - 2}$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

a) $3y' = 6y + 9 \iff y' = 2y + 3$, d'où $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2}$:

$$\boxed{x \mapsto Ce^{2x} - \frac{3}{2}}$$

b) $y' + 2y - 8 = 0 \iff y' = -2y + 8$, d'où $-\dfrac{b}{a} = 4$: $\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x} + 4}$

c) $5y' - y = 10 \iff y' = 0{,}2\,y + 2$, d'où $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{0{,}2} = -10$:

$$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{0{,}2x} - 10}$$

d) $2y' = 3 - y \iff y' = -0{,}5\,y + 1{,}5$, d'où $-\dfrac{b}{a} = 3$: $\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 3}$

e) $y' = 4(y - 2) = 4y - 8$, d'où $-\dfrac{b}{a} = 2$: $\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{4x} + 2}$

f) $2y' + y = 6 \iff y' = -0{,}5\,y + 3$, d'où $-\dfrac{b}{a} = 6$ et les solutions sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 6$. La condition $y(0) = 1$ donne $C + 6 = 1$, soit $C = -5$:

$$\boxed{f(x) = -5\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 6}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Ici $a = -0{,}4$ et $b = 6$:
$$-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-0{,}4} = \boxed{15}$$

2. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}4x} + 15$. La condition $f(0) = 2$ donne $C + 15 = 2$, soit $C = -13$:
$$\boxed{f(x) = -13\mathrm{e}^{-0{,}4x} + 15}$$

3. Comme $-0{,}4 < 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}4x} = 0$, donc :
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 15}$$
$$\boxed{\text{La droite d'équation } y = 15 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de } f \text{ en } +\infty}$$

4. $$f'(x) = -13 \times (-0{,}4)\mathrm{e}^{-0{,}4x} = 5{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}$$
L'exponentielle étant strictement positive, $f'(x) > 0$ pour tout x :
$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

5. Non. Il faudrait $-13\mathrm{e}^{-0{,}4x} + 15 = 15$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{-0{,}4x} = 0$, ce qui est impossible.
$$\boxed{f \text{ n'atteint jamais la valeur d'équilibre : elle s'en approche seulement}}$$

6. $$-13\mathrm{e}^{-0{,}4x} + 15 = 10 \iff -13\mathrm{e}^{-0{,}4x} = -5 \iff \mathrm{e}^{-0{,}4x} = \frac{5}{13}$$
En appliquant le logarithme népérien :
$$-0{,}4\,x = \ln\left(\frac{5}{13}\right) = -\ln\left(\frac{13}{5}\right)$$
$$\boxed{x = \frac{\ln\left(\frac{13}{5}\right)}{0{,}4} \approx 2{,}389}$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Les trois courbes se rapprochent toutes de la droite $y = 4$ sans jamais la traverser : c'est la **valeur d'équilibre** de l'équation, c'est-à-dire $-\dfrac{b}{a}$.

$$\boxed{-\frac{b}{a} = 4, \text{ c'est-à-dire } b = -4a}$$

   La droite est asymptote horizontale à toutes les courbes intégrales.

2. Les courbes convergent vers l'équilibre lorsque x augmente, c'est-à-dire que le terme $C\mathrm{e}^{ax}$ tend vers 0 en $+\infty$. Cela n'est possible que si $a < 0$.

$$\boxed{a \text{ est strictement négatif}}$$

3. Avec $a = -0{,}5$, la relation $b = -4a$ donne $b = 2$:

$$\boxed{b = 2, \text{ l'équation est } y' = -0{,}5\,y + 2}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 4}$$

4. Comme $f(0) = C + 4$, la constante se lit en retranchant 4 à l'ordonnée en $x = 0$:

$$\boxed{\mathcal{C}_1 : C = 8 - 4 = 4 \quad ; \quad \mathcal{C}_2 : C = 5 - 4 = 1 \quad ; \quad \mathcal{C}_3 : C = 1 - 4 = -3}$$

5. Oui : pour $C = 0$, on obtient la fonction constante égale à 4.

$$\boxed{\text{La fonction constante } x \mapsto 4 \text{ est solution}}$$

   On le vérifie : sa dérivée est nulle, et $-0{,}5 \times 4 + 2 = 0$.

6. Non. Traverser la droite signifierait couper la courbe intégrale correspondant à $C = 0$, ce qui est interdit par le théorème d'unicité.

$$\boxed{\text{Une courbe intégrale reste toujours du même côté de la droite } y = 4}$$

   On le voit aussi sur l'expression : le signe de $f(x) - 4 = C\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ est celui de C, donc constant.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. D'après le théorème 3, les solutions s'écrivent $C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$. La valeur d'équilibre valant 5 :

$$\boxed{f(x) = C\mathrm{e}^{ax} + 5}$$

   La condition $f(0) = 1$ donne $C + 5 = 1$: $\boxed{C = -4}$

2. On dérive : $f'(x) = aC\mathrm{e}^{ax} = -4a\,\mathrm{e}^{ax}$, donc $f'(0) = -4a$. La condition $f'(0) = 4$ donne :

$$-4a = 4 \iff \boxed{a = -1}$$

3. De $-\dfrac{b}{a} = 5$ avec $a = -1$, on tire $b = -5a = 5$:

$$\boxed{b = 5, \text{ l'équation est } y' = -y + 5}$$

4.

$$\boxed{f(x) = -4\mathrm{e}^{-x} + 5}$$

Vérifications : $f(0) = -4 + 5 = 1$; la valeur d'équilibre vaut $-\dfrac{5}{-1} = 5$; enfin $f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x}$ donc $f'(0) = 4$. Les trois conditions sont bien satisfaites.

Modélisation

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. La vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atomes présents, avec un coefficient de proportionnalité négatif puisque leur nombre diminue :

$$\boxed{N'(t) = -\lambda\, N(t) = -0{,}02\, N(t)}$$

2. C'est l'équation $y' = ay$ avec $a = -0{,}02$, donc $N(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}02t}$. La condition $N(0) = 10^{12}$ donne $C = 10^{12}$:

$$\boxed{N(t) = 10^{12}\,\mathrm{e}^{-0{,}02\,t}}$$

3.

$$N(50) = 10^{12}\,\mathrm{e}^{-1} \approx \boxed{3{,}68 \times 10^{11} \text{ atomes}}$$

$$\boxed{\text{Il subsiste environ } 36{,}8\ \% \text{ de l'échantillon}}$$

4. La demi-vie vérifie $N(T) = \dfrac{N_0}{2}$:

$$10^{12}\mathrm{e}^{-0{,}02T} = \frac{10^{12}}{2} \iff \mathrm{e}^{-0{,}02T} = \frac{1}{2} \iff -0{,}02\,T = -\ln 2$$

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{0{,}02} \approx 34{,}66 \text{ ans}}$$

5. On résout $N(t) = 0{,}1 \times 10^{12}$:

$$\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0{,}1 \iff -0{,}02\,t = -\ln 10 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{t = \frac{\ln 10}{0{,}02} \approx 115{,}1 \text{ ans}}$$

6. Pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} N(t+T) &= 10^{12}\,\mathrm{e}^{-0{,}02(t+T)} = 10^{12}\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} \times \mathrm{e}^{-0{,}02T} \\ &= N(t) \times \mathrm{e}^{-\ln 2} = N(t) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{N(t+T) = \frac{N(t)}{2}}$$

$\boxed{\text{La moitié des atomes disparaît sur toute période de durée } T, \text{ quel que soit l'instant de départ}}$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. La proposition 1 du cours donne $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, donc :

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}}$$

2. On résout $\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}3$:

$$-\lambda t = \ln(0{,}3) \iff t = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{\lambda}$$

$$\boxed{t \approx 9\,953 \text{ ans}}$$

3.

$$\frac{N(10\,000)}{N_0} = \mathrm{e}^{-1{,}21\times10^{-4}\times10\,000} = \mathrm{e}^{-1{,}2097} \approx 0{,}298$$

$$\boxed{\text{Il subsiste environ 29,8 \% du carbone 14}}$$

4.

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}01 \iff t = \frac{\ln 100}{\lambda} \approx \boxed{38\,069 \text{ ans}}$$

5. D'après la question précédente, la proportion tombe sous le seuil de détection au bout d'environ 38 000 ans.

$$\boxed{\text{La datation au carbone 14 n'est pas fiable au-delà de 40 000 à 50 000 ans}}$$

Pour dater des échantillons plus anciens, on utilise d'autres couples d'isotopes, de demi-vie bien plus longue — par exemple le potassium-argon, dont la demi-vie dépasse le milliard d'années.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. En développant la loi de Newton avec $\theta_{\text{ext}} = 22$ et $k = 0{,}04$:

$$\theta' = -0{,}04\,(\theta - 22) = -0{,}04\,\theta + 0{,}04 \times 22$$

$$\boxed{\theta' = -0{,}04\,\theta + 0{,}88}$$

2. Ici $a = -0{,}04$ et $b = 0{,}88$:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{0{,}88}{-0{,}04} = \boxed{22}$$

$$\boxed{\text{C'est la température de la pièce : c'est vers elle que l'objet évolue}}$$

3. Les solutions sont $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}04t} + 22$. La condition $\theta(0) = 100$ donne $C + 22 = 100$, soit $C = 78$:

$$\boxed{\theta(t) = 78\,\mathrm{e}^{-0{,}04\,t} + 22}$$

4.

$$\theta(15) = 78\,\mathrm{e}^{-0{,}6} + 22 \approx \boxed{64{,}8 \text{ °C}}$$

5. On résout $\theta(t) = 50$:

$$78\,\mathrm{e}^{-0{,}04t} = 28 \iff \mathrm{e}^{-0{,}04t} = \frac{28}{78} = \frac{14}{39} \iff -0{,}04\,t = -\ln\left(\frac{39}{14}\right)$$

$$\boxed{t = \frac{\ln\left(\frac{39}{14}\right)}{0{,}04} \approx 25{,}6 \text{ minutes}}$$

6. Comme $-0{,}04 < 0$, le terme $78\mathrm{e}^{-0{,}04t}$ tend vers 0 :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = 22}$$

Cette limite n'est jamais atteinte, puisque $78\mathrm{e}^{-0{,}04t} > 0$ pour tout t :

$$\boxed{\text{L'objet ne descend jamais exactement à 22 °C}}$$

En pratique, l'écart devient indétectable au bout de quelques heures.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Les solutions de $N' = 0{,}3\,N$ sont $t \mapsto C\mathrm{e}^{0{,}3t}$, et $N(0) = 500$ donne $C = 500$:

$$\boxed{N(t) = 500\,\mathrm{e}^{0{,}3\,t}}$$

2. $$N(5) = 500\,\mathrm{e}^{1{,}5} \approx \boxed{2\,241 \text{ bactéries}}$$

3. Le temps de doublement T vérifie $\mathrm{e}^{0{,}3T} = 2$, soit :

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{0{,}3} \approx 2{,}31 \text{ heures}}$$

4. $$500\,\mathrm{e}^{0{,}3t} = 10\,000 \iff \mathrm{e}^{0{,}3t} = 20 \iff t = \frac{\ln 20}{0{,}3} \approx \boxed{9{,}99 \text{ heures}}$$

5. Comme $0{,}3 > 0$:

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} N(t) = +\infty}$$

$$\boxed{\text{Le modèle ne peut pas rester valable indéfiniment}}$$

Une croissance exponentielle sans limite est physiquement impossible : le milieu de culture est de taille finie, les nutriments s'épuisent et les déchets s'accumulent. Au-delà d'un certain seuil, il faut recourir à un modèle tenant compte de ces contraintes — comme l'équation logistique rencontrée à l'exercice 4.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Ici $a = -0{,}2$ et $b = 9{,}8$:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{9{,}8}{-0{,}2} = \boxed{49 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

2. Les solutions sont $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 49$. La condition $v(0) = 0$ donne $C + 49 = 0$, soit $C = -49$:

$$v(t) = -49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 49 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v(t) = 49\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2\,t}\right)}$$

3. $$v(5) = 49\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx \boxed{31{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

4. $$v'(t) = 49 \times 0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 9{,}8\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$$

$$\boxed{v \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} v(t) = 49}$$

5. On résout $v(t) = 40$:

$$49\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}\right) = 40 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1 - \frac{40}{49} = \frac{9}{49}$$

$$-0{,}2\,t = -\ln\left(\frac{49}{9}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{t = \frac{\ln\left(\frac{49}{9}\right)}{0{,}2} \approx 8{,}5 \text{ secondes}}$$

6. Il faudrait $e^{-0,2t} = 0$, ce qui est impossible :

   La vitesse limite n'est jamais atteinte exactement

   Physiquement, l'écart devient toutefois négligeable très vite : au bout de 30 secondes, $v(30) = 49\left(1 - e^{-6}\right) \approx 48{,}88\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit moins de 0,3 % d'écart. C'est ce qui justifie l'expression courante de « vitesse limite atteinte ».

Exercices de synthèse

EXERCICE 22 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**A**	Théorème 1 avec $a = 5$. La réponse B place la constante au mauvais endroit, la réponse C se trompe de signe.
2	**B**	Ici $a = -2$ et $b = 8$, donc $-\dfrac{b}{a} = 4$.
3	**A**	$a = 3$ et $b = -9$, donc $-\dfrac{b}{a} = 3$.
4	**B**	Les solutions sont $x \mapsto Ce^x$, et $C = 2$. La réponse A confond la constante multiplicative avec le coefficient de x.
5	**A**	La dérivée vaut $-12e^{-3x}$, soit -3 fois la fonction.
6	**A**	Si $a < 0$, alors e^{ax} tend vers 0 en $+\infty$, et Ce^{ax} aussi.
7	**B**	La fonction nulle correspond à $C = 0$. Une constante non nulle aurait une dérivée nulle sans que $2y$ le soit.
8	**B**	C'est le théorème 2, étendu au cas $y' = ay + b$ par le théorème 3.
9	**B**	C'est la proposition 1 : $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.
10	**B**	En divisant par 2 : $y' + 3y = 0$, soit $y' = -3y$.

EXERCICE 23 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Vraie**. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{3x}$, et chaque valeur du réel C en fournit une : il y en a donc une infinité.
2. **Vraie**. Si $f = 0$, alors $f' = 0$ et $af = 0$: l'égalité est vérifiée quel que soit a. C'est le cas $C = 0$ du théorème 1.
3. **Fausse**. Si $f = 0$, alors $f' = 0$ tandis que $2f + 1 = 1 \neq 0$. La fonction nulle n'est solution de $y' = ay + b$ que si $b = 0$.
4. **Vraie**. Si $f' = af$ et $g' = ag$, alors :
$$(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$$
   La somme est donc bien solution.
5. **Fausse**. Si $f' = af + b$ et $g' = ag + b$, alors :
$$(f + g)' = af + b + ag + b = a(f + g) + 2b$$
   On obtient $2b$ et non b : la somme est solution de $y' = ay + 2b$. Contre-exemple avec $y' = y + 1$: la fonction constante -1 est solution, mais la fonction constante -2 ne l'est pas.

6. **Fausse**. C'est exactement ce qu'interdit le théorème 2 : par chaque point du plan passe une unique courbe intégrale. Si deux courbes se coupaient en un point, il y aurait deux solutions pour une même condition initiale.

7. **Vraie**. Les solutions sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + 3$. Comme $-1 < 0$, le terme $C\mathrm{e}^{-x}$ tend vers 0 en $+\infty$, et ce quelle que soit la valeur de C.

8. **Vraie**. Les solutions sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, et la condition donne $C = 0$: c'est bien la fonction nulle. L'unicité du théorème 2 garantit qu'il n'y en a pas d'autre.

9. **Fausse**. C'est précisément le point remarquable de la proposition 1 : $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ ne dépend que de λ, donc de la nature du noyau, et nullement de N_0.

10. **Vraie**. Une solution non nulle s'écrit $C\mathrm{e}^{ax}$ avec $C \neq 0$. Comme l'exponentielle est strictement positive, le signe de $f(x)$ est celui de C : il est constant, et f ne s'annule jamais.

EXERCICE 24 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Ici $a = -2$ et $b = 6$, donc :
$$-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-2} = \boxed{3}$$
$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x} + 3}$$

2. La condition $f(0) = 1$ donne $C + 3 = 1$, soit $C = -2$:
$$\boxed{f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 3}$$

3. $$f'(x) = -2 \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = 4\mathrm{e}^{-2x}$$
L'exponentielle étant strictement positive, $f'(x) > 0$:
$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

4. Comme $-2 < 0$:
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$
$$\boxed{\text{La droite d'équation } y = 3 \text{ est asymptote horizontale en } +\infty}$$

5. $$-2\mathrm{e}^{-2x} + 3 = 0 \iff \mathrm{e}^{-2x} = \frac{3}{2} \iff -2x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\boxed{x = -\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2} \approx -0{,}203}$$

6. La fonction f étant strictement croissante et s'annulant en ce point unique :
$$\boxed{f(x) < 0 \text{ pour } x < -\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2} \quad \text{et} \quad f(x) > 0 \text{ au-delà}}$$

7. On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4\mathrm{e}^0 = 4$, d'où $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$:
$$\boxed{T : y = 4x + 1}$$

8.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	3

La valeur 3 n'est pas atteinte : elle n'est qu'une limite, matérialisée par l'asymptote.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

1. On lit l'ordonnée à l'origine de la courbe, puis celle du point d'abscisse 60 :

$$\boxed{\theta(0) = 180 \text{ °C} \quad ; \quad \theta(60) \approx 46 \text{ °C}}$$

2. Ici $a = -0{,}03$ et $b = 0{,}6$:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{0{,}6}{-0{,}03} = \boxed{20}$$

$$\boxed{\text{La droite en pointillés est l'asymptote horizontale : c'est la température de la cuisine}}$$

3. Les solutions sont $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}03t} + 20$, et $\theta(0) = 180$ donne $C + 20 = 180$, soit $C = 160$:

$$\boxed{\theta(t) = 160\,\mathrm{e}^{-0{,}03\,t} + 20}$$

4.

$$\theta(30) = 160\,\mathrm{e}^{-0{,}9} + 20 \approx \boxed{85{,}1 \text{ °C}}$$

La lecture graphique au point d'abscisse 30 donnait bien une valeur voisine de 85 °C.

5. On résout $\theta(t) = 60$:

$$160\,\mathrm{e}^{-0{,}03t} = 40 \iff \mathrm{e}^{-0{,}03t} = \frac{1}{4} \iff -0{,}03\,t = -\ln 4$$

$$t = \frac{\ln 4}{0{,}03} \approx 46{,}2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\text{le plat peut être servi au bout d'environ 46 minutes}}$$

6.

$$\theta'(t) = 160 \times (-0{,}03)\mathrm{e}^{-0{,}03t} = -4{,}8\,\mathrm{e}^{-0{,}03t} < 0$$

$$\boxed{\theta \text{ est strictement décroissante} \quad ; \quad \lim_{t\to+\infty} \theta(t) = 20}$$

$$\boxed{\text{Le plat refroidit sans jamais descendre exactement à 20 °C}}$$

On observe sur la courbe que le refroidissement est rapide au début, puis de plus en plus lent : c'est logique, puisque la vitesse $-0{,}03(\theta - 20)$ est proportionnelle à l'écart avec la température ambiante, écart qui diminue.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Ici $a = -0{,}25$ et $b = 2$:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-0{,}25} = \boxed{8 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}}$$

$$\boxed{\text{C'est la concentration vers laquelle le sang tend à la longue}}$$

Elle correspond à l'équilibre entre l'apport de la perfusion et l'élimination par l'organisme.

2. Les solutions sont $t \mapsto Ce^{-0,25t} + 8$, et $c(0) = 0$ donne $C + 8 = 0$, soit $C = -8$:

$$c(t) = -8\,e^{-0,25t} + 8 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{c(t) = 8\left(1 - e^{-0,25\,t}\right)}$$

3. $$c(4) = 8\left(1 - e^{-1}\right) \approx \boxed{5{,}06 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}}$$

4. $$c'(t) = 8 \times 0{,}25\,e^{-0,25t} = 2\,e^{-0,25t} > 0$$

$$\boxed{c \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$$

La concentration augmente donc continûment, de plus en plus lentement.

5. On résout $c(t) = 6$:

$$8\left(1 - e^{-0,25t}\right) = 6 \iff e^{-0,25t} = 1 - \frac{6}{8} = \frac{1}{4} \iff -0{,}25\,t = -\ln 4$$

$$\boxed{t = \frac{\ln 4}{0{,}25} \approx 5{,}5 \text{ heures}}$$

6. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $e^{-0,25t} > 0$, donc $1 - e^{-0,25t} < 1$ et :

$$c(t) = 8\left(1 - e^{-0,25t}\right) < 8$$

$$\boxed{\text{La concentration reste toujours strictement inférieure à } 8 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}}$$

Comme $8 < 10$, le seuil de toxicité ne peut jamais être atteint :

$$\boxed{\text{La perfusion est sans danger, quelle que soit sa durée}}$$

C'est tout l'intérêt de ce mode d'administration : le débit constant fixe une concentration plafond, indépendante du temps de traitement.

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. La proposition 1 donne $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$:

$$\boxed{\lambda_{\text{I}} = \frac{\ln 2}{8} \approx 0{,}0866 \text{ jour}^{-1}} \quad ; \quad \boxed{\lambda_{\text{Cs}} = \frac{\ln 2}{30} \approx 0{,}0231 \text{ an}^{-1}}$$

2. La durée 24 jours vaut exactement trois demi-vies, puisque $24 = 3 \times 8$. À chaque demi-vie, la quantité est divisée par 2 :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\text{Il reste } \frac{1}{8}, \text{ soit } 12{,}5\ \% \text{ de l'iode initial}}$$

3. De même, $60 = 2 \times 30$ correspond à deux demi-vies :

$$\boxed{\text{Il reste } \frac{1}{4}, \text{ soit } 25\ \% \text{ du césium initial}}$$

4. $$e^{-\lambda_{\text{I}}\,t} = 0{,}01 \iff t = \frac{\ln 100}{\lambda_{\text{I}}} = \frac{8 \ln 100}{\ln 2} \approx \boxed{53 \text{ jours}}$$

5. L'iode 131 disparaît presque entièrement en moins de deux mois : il est très actif immédiatement après l'accident, mais son effet s'éteint vite.

$$\boxed{\text{L'iode 131 pose un problème sanitaire à court terme}}$$

Le césium 137, avec une demi-vie de 30 ans, contamine durablement les sols : après 60 ans il en reste encore un quart.

$$\boxed{\text{Le césium 137 pose un problème à long terme}}$$

C'est ce que l'on observe autour des sites d'accidents nucléaires : l'évacuation d'urgence vise l'iode, tandis que l'interdiction durable des terrains vise le césium.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

Partie A : recherche d'une solution particulière.

1. Si $\varphi(x) = ax + b$, alors $\varphi'(x) = a$. L'équation (E) s'écrit :

$$a = -2(ax + b) + 4x = (-2a + 4)x - 2b$$

Cette égalité doit être vraie pour tout réel x. En identifiant les coefficients :

$$\begin{cases} -2a + 4 = 0 \\ a = -2b \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi(x) = 2x - 1}$$

Vérification : $\varphi'(x) = 2$ et $-2(2x - 1) + 4x = -4x + 2 + 4x = 2$.

Partie B : résolution complète.

2. Posons $g = f - \varphi$, fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors : En dérivant, $g'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = f'(x) - 2$.

Sens direct. Si f est solution de (E), alors $f'(x) = -2f(x) + 4x$, donc :

$$g'(x) = -2f(x) + 4x - 2 = -2\big(g(x) + \varphi(x)\big) + 4x - 2$$

$$= -2g(x) - 2(2x - 1) + 4x - 2 = -2g(x) - 4x + 2 + 4x - 2 = -2g(x)$$

La fonction g est donc solution de $y' = -2y$.

Réciproque. Si $g' = -2g$, alors $f = g + \varphi$ vérifie :

$$f'(x) = g'(x) + 2 = -2g(x) + 2 = -2\big(f(x) - \varphi(x)\big) + 2$$

$$= -2f(x) + 2(2x - 1) + 2 = -2f(x) + 4x - 2 + 2 = -2f(x) + 4x$$

donc f est solution de (E).

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \iff f - \varphi \text{ est solution de } y' = -2y}$$

3. Les solutions de $y' = -2y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-2x}$. Comme $f = g + \varphi$:

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont les fonctions } x \mapsto Ce^{-2x} + 2x - 1, \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$$

4. La condition $g(0) = 3$ donne $C - 1 = 3$, soit $C = 4$:

$$\boxed{g(x) = 4e^{-2x} + 2x - 1}$$

Partie C : étude de la solution obtenue.

5. $$g'(x) = 4 \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} + 2 = -8\mathrm{e}^{-2x} + 2$$
$$g'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{-2x} = \frac{1}{4} \iff -2x = -\ln 4 \iff x = \frac{\ln 4}{2} = \boxed{\ln 2}$$

6. La fonction $x \mapsto -8\mathrm{e}^{-2x}$ est croissante, donc g' l'est aussi : g' est négative avant $\ln 2$ et positive après.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

En effet :
$$g(\ln 2) = 4\mathrm{e}^{-2\ln 2} + 2\ln 2 - 1 = 4 \times \frac{1}{4} + 2\ln 2 - 1 = \boxed{2\ln 2 \approx 1{,}386}$$

7. $$g(x) - (2x-1) = 4\mathrm{e}^{-2x}$$
Comme $-2 < 0$, ce terme tend vers 0 en $+\infty$:
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} [g(x) - (2x-1)] = 0}$$
$$\boxed{\text{La droite d'équation } y = 2x - 1 \text{ est asymptote oblique à la courbe de } g \text{ en } +\infty}$$
De plus $4\mathrm{e}^{-2x} > 0$: la courbe reste toujours au-dessus de cette asymptote.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Partie A : structure des solutions.

1. Par hypothèse $f' = af$ et $g' = ag$. La somme et la différence sont dérivables, et :
$$(f+g)' = f' + g' = af + ag = a(f+g)$$
$$(f-g)' = f' - g' = af - ag = a(f-g)$$
$$\boxed{f+g \text{ et } f-g \text{ sont solutions de } y' = ay}$$

2. $$(kf)' = k\,f' = k\,(af) = a\,(kf)$$
$$\boxed{kf \text{ est solution de } y' = ay}$$

3. Par hypothèse $f_1' = af_1 + b$ et $f_2' = af_2 + b$. En soustrayant :
$$(f_1 - f_2)' = f_1' - f_2' = (af_1 + b) - (af_2 + b) = a(f_1 - f_2)$$
Les deux termes constants b se sont éliminés :
$$\boxed{f_1 - f_2 \text{ est solution de } y' = ay}$$

4. Soit φ une solution particulière connue de $y' = ay + b$, et f une solution quelconque. D'après la question 3, $f - \varphi$ est solution de $y' = ay$, donc il existe un réel C tel que $f(x) - \varphi(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, c'est-à-dire :

$$f(x) = \varphi(x) + C\mathrm{e}^{ax}$$

Connaître une seule solution particulière suffit à les connaître toutes

C'est exactement la méthode employée dans la démonstration du théorème 3, et reprise à l'exercice 28.

Partie B : redémonstration du théorème 1.

5. La fonction g est le produit de f, dérivable par hypothèse, et de $x \mapsto \mathrm{e}^{-ax}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable, et :

$$g'(x) = f'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} + f(x) \times (-a)\mathrm{e}^{-ax} = (f'(x) - a\,f(x))\mathrm{e}^{-ax}$$

6. Comme f est solution de $y' = ay$, on a $f'(x) = a\,f(x)$, donc $f'(x) - a\,f(x) = 0$:

$$\boxed{g'(x) = 0 \times \mathrm{e}^{-ax} = 0 \text{ pour tout réel } x}$$

7. Une fonction de dérivée nulle sur un *intervalle* y est constante. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il existe un réel C tel que $g(x) = C$ pour tout x, c'est-à-dire $f(x)\mathrm{e}^{-ax} = C$. En multipliant les deux membres par e^{ax}, qui n'est jamais nul :

$$\boxed{f(x) = C\mathrm{e}^{ax}}$$

On a bien démontré qu'il n'existe pas d'autres solutions que celles annoncées par le théorème 1.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. $$f'_C(x) = C \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = -C\mathrm{e}^{-x}$$
$$-f_C(x) + 2 = -\left(C\mathrm{e}^{-x} + 2\right) + 2 = -C\mathrm{e}^{-x}$$

Les deux expressions coïncident : $\boxed{f_C \text{ est solution de } y' = -y + 2}$

2. $$f_C(0) = C + 2 = 5 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C = 3}$$

3. $$f_C(1) = C\mathrm{e}^{-1} + 2 = 0 \iff C\mathrm{e}^{-1} = -2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C = -2\mathrm{e}}$$

4. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'_C(x) = -C\mathrm{e}^{-x}$ est l'opposé de celui de C :

si $C > 0$	:	f_C est strictement décroissante
si $C < 0$	:	f_C est strictement croissante
si $C = 0$	:	f_C est constante

5. Oui : pour $C = 0$, la fonction f_0 est constante égale à 2.

$$\boxed{C = 0 \text{ donne la solution constante } x \mapsto 2}$$

Cette valeur 2 est exactement la valeur d'équilibre $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{-1} = 2$: partir de l'équilibre, c'est y rester.

6. Comme $-1 < 0$, le terme Ce^{-x} tend vers 0 en $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_C(x) = 2}$$

$$\boxed{\text{Ce résultat ne dépend pas de } C}$$

Toutes les courbes intégrales admettent donc la même asymptote horizontale $y = 2$.

7. Supposons que les deux courbes aient un point commun d'abscisse x_0. Alors :

$$Ce^{-x_0} + 2 = C'e^{-x_0} + 2 \iff (C - C')\,e^{-x_0} = 0$$

L'exponentielle ne s'annulant jamais, il vient $C - C' = 0$, c'est-à-dire $C = C'$, ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{\text{Deux courbes distinctes de cette famille n'ont aucun point commun}}$$

$$\boxed{\text{On retrouve le théorème 2 : par chaque point du plan passe une unique courbe intégrale}}$$

Pour aller plus loin

EXERCICE 31 ⋆⋆

L'équation s'écrit $y' = \lambda y + e^x$. Comme à l'exercice 28, dès que l'on connaît une solution particulière φ, une fonction f est solution si et seulement si $f - \varphi$ est solution de $y' = \lambda y$, c'est-à-dire si et seulement si $f = \varphi + Ke^{\lambda x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

1. Cherchons $\varphi(x) = Ce^x$. Alors $\varphi'(x) - \lambda\varphi(x) = (1-\lambda)Ce^x$, et cette quantité vaut e^x pour tout x si et seulement si $(1-\lambda)C = 1$, soit $C = \frac{1}{1-\lambda}$, ce qui est possible car $\lambda \neq 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 1,\ \text{les solutions sont les fonctions } x \mapsto \frac{e^x}{1-\lambda} + Ke^{\lambda x},\ K \in \mathbb{R}.}$$

2. Pour $\lambda = 1$, la fonction $x \mapsto Ce^x$ ne convient plus, puisque $(1-\lambda)C = 0 \neq 1$: c'est une solution de l'équation sans second membre. Cherchons $\varphi(x) = Cxe^x$. Alors $\varphi'(x) = C(x+1)e^x$ et $\varphi'(x) - \varphi(x) = Ce^x$, qui vaut e^x pour $C = 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda = 1,\ \text{les solutions sont les fonctions } x \mapsto (x+K)e^x,\ K \in \mathbb{R}.}$$

Remarque. On retrouve le résultat de la question 4 de l'exercice 3 : toutes les fonctions $x \mapsto (x+m)e^x$ sont solutions de $y' = y + e^x$. Lorsque le second membre est lui-même solution de l'équation sans second membre, il faut multiplier la forme cherchée par x. Ce phénomène, appelé *résonance*, se retrouve en physique : une excitation à la fréquence propre d'un système produit une réponse qui croît plus vite que l'excitation.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

Partie A

1. Si $a = 1$, la relation s'écrit $u_{n+1} = u_n + b$: la suite est arithmétique de raison b, et $\boxed{u_n = u_0 + nb}$.

2. Comme $a \neq 1$, $x = ax + b \iff (1-a)x = b \iff x = \dfrac{b}{1-a}$.

$$\boxed{\ell = \frac{b}{1-a}}$$

3. Pour tout n, en soustrayant membre à membre $u_{n+1} = au_n + b$ et $\ell = a\ell + b$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell) = a\, v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison a, donc $v_n = a^n v_0$ et

$$\boxed{u_n = \ell + a^n\,(u_0 - \ell)}$$

Vérification : avec $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 60$ et $u_0 = 100$ (exercice 29 du chapitre 5), on trouve $\ell = \frac{60}{0{,}2} = 300$ et $u_n = 300 - 200 \times 0{,}8^{\,n}$, la formule déjà obtenue.

4. Si $u_0 = \ell$, la suite est constante, égale à ℓ, donc convergente. Sinon, $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$ avec $u_0 - \ell \neq 0$, et (u_n) converge si et seulement si (a^n) converge, c'est-à-dire si et seulement si $-1 < a \leqslant 1$; le cas $a = 1$ étant exclu ici, il reste $-1 < a < 1$, et la limite est alors ℓ.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge si et seulement si } u_0 = \ell \text{ ou } |a| < 1.}$$

Remarque. Le parallèle avec le cours est complet. Le point fixe ℓ joue le rôle de la valeur d'équilibre $-\frac{b}{a}$, la soustraction de ℓ celle de la solution constante, et la suite géométrique (a^n) celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$. La condition $|a| < 1$ remplace la condition $a < 0$ qui assurait, pour $y' = ay + b$, la convergence vers l'équilibre.

Partie B

5. Pour tout n, comme $a^{n+1} \neq 0$:

$$z_{n+1} - z_n = \frac{u_{n+1}}{a^{n+1}} - \frac{u_n}{a^n} = \frac{u_{n+1} - au_n}{a^{n+1}} = \boxed{\frac{w_n}{a^{n+1}}}$$

6. En sommant ces égalités pour k allant de 0 à $n-1$, la somme de gauche se télescope :

$$z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k}{a^{k+1}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_n = a^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{\,n-1-k}\, w_k}$$

Vérification : pour $n = 2$, $u_2 = a(au_0 + w_0) + w_1 = a^2u_0 + aw_0 + w_1$, ce que donne bien la formule.

Remarque. Diviser par a^n, c'est exactement ce que fait la partie B de l'exercice 29, où l'on multiplie $f(x)$ par e^{-ax} : dans les deux cas, on neutralise la partie « géométrique » de l'évolution pour ne garder que l'effet du second membre. Pour les équations différentielles, cette technique s'appelle la *variation de la constante* ; elle est étudiée après le baccalauréat.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

1. Avec $x = y = 0$, on obtient $2f(0) = 4f(0)$, donc $\boxed{f(0) = 0}$. Avec $x = 0$ et y quelconque, on obtient $f(y) + f(-y) = 2f(0) + 2f(y) = 2f(y)$, donc $f(-y) = f(y)$:

$$\boxed{f \text{ est paire.}}$$

2. Fixons y et dérivons deux fois par rapport à x les deux membres de l'égalité ; la dérivée seconde de $x \mapsto f(x+y)$ est $x \mapsto f''(x+y)$, celle de $x \mapsto f(x-y)$ est $x \mapsto f''(x-y)$, et $2f(y)$ ne dépend pas de x :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)$$

Fixons maintenant x et dérivons deux fois par rapport à y ; la dérivée de $y \mapsto x - y$ vaut -1, et deux dérivations font apparaître $(-1)^2 = 1$:

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(y)$$

En comparant, $f''(x) = f''(y)$ pour tous réels x et y :

$$\boxed{f'' \text{ est constante.}}$$

3. Notons $2a$ cette constante. La fonction $x \mapsto f'(x) - 2ax$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, donc est constante : $f'(x) = 2ax + b$. De même, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Comme $f(0) = 0$, $c = 0$, et comme f est paire, $f(-x) - f(x) = -2bx = 0$ pour tout x, donc $b = 0$. Réciproquement, si $f(x) = ax^2$:

$$a(x+y)^2 + a(x-y)^2 = 2ax^2 + 2ay^2 = 2\left(f(x) + f(y)\right)$$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto ax^2,\ a \in \mathbb{R}$.

Remarque. L'équation fonctionnelle a été transformée en l'équation différentielle la plus simple qui soit, $y'' =$ constante. C'est une méthode générale : dériver une équation fonctionnelle fait apparaître une équation différentielle, que l'on sait résoudre. Avec $f(x) = x^2$, l'équation s'écrit $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$: c'est l'identité du parallélogramme du chapitre 4, écrite pour des nombres au lieu de vecteurs.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Mise en équation. Soit f une solution et x un réel. La tangente au point $M\,(x\,;f(x))$ a pour équation $Y = f(x) + f'(x)(X - x)$, avec $f'(x) \neq 0$ puisqu'elle n'est pas parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe cet axe lorsque $Y = 0$, c'est-à-dire au point $N(x)$ d'abscisse $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Le projeté de M sur l'axe est $P(x\,;0)$, et la condition s'écrit :

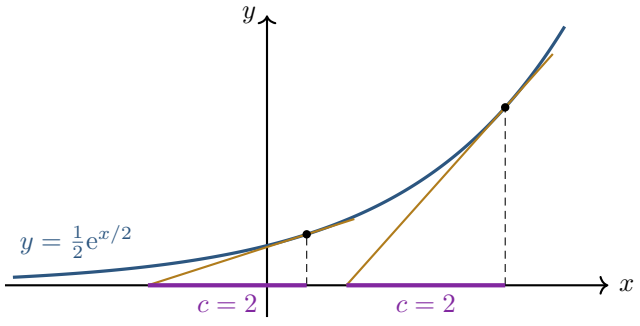
$$PN = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| = c \qquad \text{pour tout réel } x$$

où $c \geqslant 0$ est une constante, appelée *sous-tangente*.

Analyse. Si $c = 0$, alors f est la fonction nulle, et $f' = 0$, ce qui est exclu. Donc $c > 0$, et f ne s'annule jamais ; étant continue, elle garde un signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. La dérivée f' ne s'annule pas non plus, et l'on admet qu'elle garde, elle aussi, un signe constant. *(Admis : c'est vrai pour toute fonction dérivée qui ne s'annule pas sur un intervalle, d'après un théorème de Darboux démontré après le baccalauréat ; la difficulté est que f' n'est pas supposée continue.)* Le quotient $\frac{f'}{f}$ a donc un signe constant, et sa valeur absolue vaut $\frac{1}{c}$: il existe $\lambda \in \left\{\frac{1}{c}\,;-\frac{1}{c}\right\}$ tel que $f' = \lambda f$. D'après le théorème 1, $f(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x}$, avec $C \neq 0$ puisque f ne s'annule pas.

Synthèse. Réciproquement, si $f(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $C \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, alors $f'(x) = \lambda f(x) \neq 0$ et $\left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| = \frac{1}{|\lambda|}$ est constant.

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{\lambda x},\ C \neq 0,\ \lambda \neq 0$; la sous-tangente vaut $\dfrac{1}{|\lambda|}$.



Sur cette figure, tracée pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on lit qu'en deux points différents de la courbe, la tangente (en ocre) coupe l'axe des abscisses à la même distance $2 = \frac{1}{\lambda}$ du pied de la verticale (segments violets).

Remarque. Ce problème, posé par Florimond de Beaune à Descartes au XVII$^{\mathrm{e}}$ siècle, est l'un des premiers « problèmes inverses des tangentes », où l'on cherche une courbe connaissant une propriété de ses tangentes. C'est l'une des origines historiques de l'exponentielle, avant même que celle-ci ait reçu son nom.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Pour h petit, la courbe d'une fonction dérivable est proche de sa tangente : $f(t+h) \approx f(t) + h\,f'(t)$. Si f est solution de $y' = y$, cela devient $f(t+h) \approx f(t) + h\,f(t)$. Partant de $f(0) = 1 = y_0$, la relation $y_{k+1} = y_k + hy_k$ reproduit cette approximation de proche en proche : $y_1 \approx f(h)$, $y_2 \approx f(2h)$, et ainsi de suite, y_k étant une valeur approchée de $f(kh) = \mathrm{e}^{kh}$.

2. La relation s'écrit $y_{k+1} = (1+h)\,y_k$: la suite (y_k) est géométrique de raison $1+h$ et de premier terme 1. Donc $y_n = (1+h)^n$, et comme $h = \frac{x}{n}$:

$$\boxed{y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

3. D'après l'exercice 32 du chapitre 5, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ tend vers e^x.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = \mathrm{e}^x}$$

   La méthode d'Euler converge donc vers la vraie solution lorsque le pas h tend vers 0.

4. Pour $x = 1$:

n	y_n	erreur $\mathrm{e} - y_n$
10	2,593 74	0,124 5
1 000	2,716 92	0,001 36

   L'approximation est toujours inférieure à e : la courbe de l'exponentielle, convexe, est au-dessus de ses tangentes (chapitre 3), si bien que chaque pas sous-estime la croissance. Quand n est multiplié par 100, l'erreur est divisée par environ 100 : elle est à peu près proportionnelle au pas $h = \frac{1}{n}$, et vaut environ $\frac{\mathrm{e}}{2n}$. Pour gagner une décimale, il faut donc dix fois plus de calculs, ce qui rappelle la lenteur observée à l'exercice 32 du chapitre 5.

5. Pour $y' = ay$, la relation devient $y_{k+1} = y_k + h\,a\,y_k = (1+ah)\,y_k$, d'où

$$\boxed{y_n = \left(1 + \frac{ax}{n}\right)^n}$$

   qui tend vers e^{ax}, toujours d'après l'exercice 32 du chapitre 5.

Remarque. La méthode d'Euler s'applique à des équations que l'on ne sait pas résoudre explicitement, comme l'équation logistique de l'exercice 4 : c'est ainsi que travaillent les logiciels de simulation, avec des variantes plus précises.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆⋆

D'après l'exercice 31 du chapitre 5, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\alpha\,x^{-\alpha-1}$, et $x^\alpha \times x^{-\alpha} = 1$.

Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$. Posons, pour $x > 0$, $g(x) = f(x)\,x^{-\alpha}$, de sorte que $f(x) = g(x)\,x^\alpha$; les fonctions f et g sont dérivables en même temps.

Première condition ⇒ seconde. Si f est dérivable et vérifie $f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x)$, alors

$$g'(x) = f'(x)\,x^{-\alpha} - \alpha\,x^{-\alpha-1} f(x) = x^{-\alpha}\left(f'(x) - \frac{\alpha}{x} f(x)\right) = 0$$

La fonction g, de dérivée nulle sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, est constante, égale à un réel C, et $f(x) = C\,x^\alpha$.

Seconde condition ⇒ première. Si $f(x) = Cx^\alpha$, alors f est dérivable et $f'(x) = C\alpha x^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{x}\,Cx^\alpha = \frac{\alpha}{x} f(x)$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x) \text{ sur }]0\,;+\infty[\iff f(x) = Cx^\alpha,\ C \in \mathbb{R}}$$

Remarque. Le coefficient $\frac{\alpha}{x}$ n'est plus constant, et les solutions ne sont plus des exponentielles mais des puissances. On peut aussi le comprendre ainsi : en posant $x = \mathrm{e}^t$ et $F(t) = f\left(\mathrm{e}^t\right)$, on obtient $F'(t) = \mathrm{e}^t f'\left(\mathrm{e}^t\right) = \alpha F(t)$, une équation du cours, dont les solutions $C\mathrm{e}^{\alpha t} = C\left(\mathrm{e}^t\right)^\alpha = Cx^\alpha$ redonnent le résultat. L'erreur la plus répandue serait de « résoudre » en écrivant $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{x}x}$, comme si $\frac{\alpha}{x}$ était une constante.