EXERCICES – CHAPITRE 8

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Notion d'équation différentielle

EXERCICE 1 ⋆

Dans chaque cas, vérifier que la fonction f proposée est solution de l'équation différentielle donnée. On calculera $f'(x)$ d'une part, et le second membre d'autre part, avant de les comparer.

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^{4x}$ et $y' = 4y$
2. $f(x) = -2\mathrm{e}^{-x}$ et $y' = -y$
3. $f(x) = \mathrm{e}^{3x} + 1$ et $y' = 3y - 3$
4. $f(x) = 4\mathrm{e}^{-2x} + 5$ et $y' = -2y + 10$
5. $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ et $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}$

EXERCICE 2 ⋆

Parmi les six fonctions suivantes, déterminer lesquelles sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -3y$. Justifier chaque réponse.

a) $f_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}$
b) $f_2(x) = -3\mathrm{e}^{x}$
c) $f_3(x) = 5\mathrm{e}^{-3x}$
d) $f_4(x) = \mathrm{e}^{3x}$
e) $f_5(x) = 0$
f) $f_6(x) = \mathrm{e}^{-3x} + 1$

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. Déterminer le réel k pour que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ soit solution de $y' = 5y$.
2. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $f : x \mapsto a\mathrm{e}^{2x} + b$ soit solution de $y' = 2y - 8$. Combien y a-t-il de possibilités ?
3. Déterminer la constante C pour que la fonction $f : x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$ vérifie $f(1) = 6$.
4. Déterminer les réels m pour lesquels la fonction $f : x \mapsto (x + m)\mathrm{e}^{x}$ est solution de $y' = y + \mathrm{e}^{x}$. Commenter le résultat obtenu.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Vérifier que chacune des fonctions suivantes est solution de l'équation différentielle indiquée.

1. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et $y' = -y + 2x\mathrm{e}^{-x}$
2. $f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{3x}$ et $y' = 3y + 2\mathrm{e}^{3x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$ et $y' = y(1 - y)$

La troisième équation, dite *logistique*, modélise une croissance limitée par les ressources du milieu. Elle n'est pas au programme, mais on peut vérifier qu'une fonction en est solution.

L'équation $y' = ay$

EXERCICE 5 ⋆

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes. On identifiera à chaque fois la valeur de a.

a) $y' = 3y$

b) $y' = -2y$

c) $y' = 0{,}5\,y$

d) $y' + 4y = 0$

e) $2y' = 6y$

f) $3y' + y = 0$

EXERCICE 6 ⋆

Déterminer dans chaque cas l'unique solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $y' = 2y$ et $y(0) = 5$

b) $y' = -y$ et $y(0) = -3$

c) $y' = 3y$ et $y(1) = \mathrm{e}^3$

d) $y' = -0{,}5\,y$ et $y(2) = 4$

e) $y' + 5y = 0$ et $y(0) = 2$

f) $y' = 4y$ et $y(-1) = 1$

EXERCICE 7 ⋆⋆

Chacune des équations suivantes doit d'abord être ramenée à la forme $y' = ay$. La résoudre ensuite.

a) $4y' - 8y = 0$

b) $5y' + 2y = 0$

c) $\dfrac{y'}{2} = -3y$

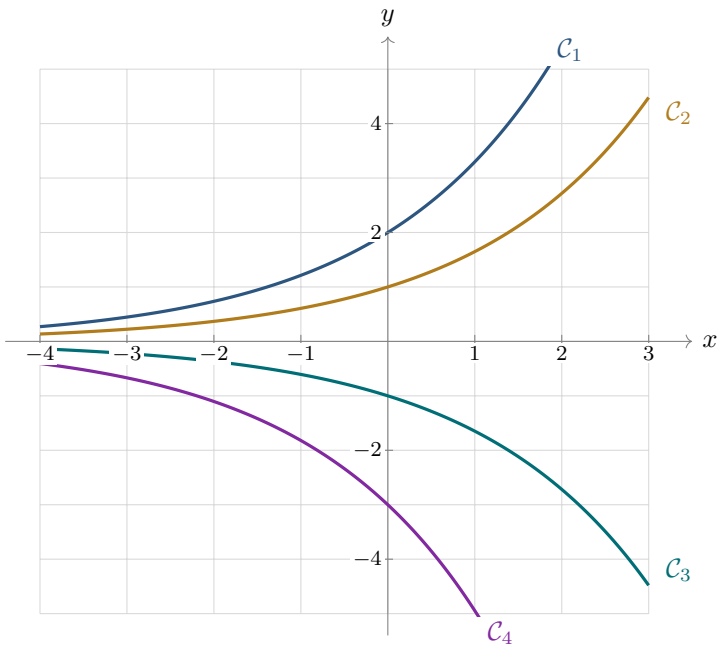
d) $2y' - y = 0$ avec $y(0) = 7$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Une fonction f est solution de $y' = ay$ et vérifie $f(0) = 2$ et $f(1) = 2\mathrm{e}^3$. Déterminer a, puis l'expression de f.
2. Une fonction g est solution de $y' = ay$ et vérifie $g(0) = 1$ et $g(2) = \mathrm{e}^{-6}$. Déterminer a.
3. Une population évolue selon l'équation $y' = ay$ et double tous les 10 ans. Déterminer la valeur exacte de a, puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Le graphique ci-dessous représente quatre courbes intégrales de l'équation différentielle $y' = 0{,}5\,y$.



1. Donner la forme générale des solutions de cette équation différentielle.
2. Déterminer, par lecture graphique de l'ordonnée en $x = 0$, la valeur de la constante C associée à chacune des quatre courbes.
3. Une cinquième courbe intégrale passe par le point de coordonnées $(0\,;4)$. Déterminer l'expression de la solution correspondante.
4. Deux courbes intégrales distinctes peuvent-elles se couper ? Justifier à l'aide du théorème 2 du cours.
5. L'équation admet-elle une solution constante ? Si oui, laquelle, et pourquoi ne figure-t-elle pas parmi les quatre courbes tracées ?

EXERCICE 10 ⋆⋆

Soit f la solution de l'équation $y' = -4y$ vérifiant $f(0) = 5$.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. La fonction f s'annule-t-elle ? Justifier.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 1$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au millième.
6. Reprendre les questions 2 et 3 pour la solution de $y' = 3y$ vérifiant $g(0) = -2$. Quel rôle joue le signe de a ?

L'équation $y' = ay + b$

EXERCICE 11 ⋆

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes. On identifiera a et b, puis on calculera la valeur d'équilibre $-\dfrac{b}{a}$.

a) $y' = 2y + 6$

b) $y' = -y + 4$

c) $y' = 3y - 12$

d) $y' = -0{,}5\,y + 2$

e) $y' = 5y + 1$

f) $y' = -2y - 6$

EXERCICE 12 ⋆

Déterminer dans chaque cas l'unique solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $y' = 3y - 6$ et $y(0) = 4$

b) $y' = -y + 2$ et $y(0) = 5$

c) $y' = -0{,}2\,y + 1$ et $y(0) = 10$

d) $y' = 4y + 8$ et $y(1) = 0$

EXERCICE 13 ⋆⋆

Ramener chacune des équations suivantes à la forme $y' = ay + b$, puis la résoudre.

a) $3y' = 6y + 9$

b) $y' + 2y - 8 = 0$

c) $5y' - y = 10$

d) $2y' = 3 - y$

e) $y' = 4(y - 2)$

f) $2y' + y = 6$ avec $y(0) = 1$

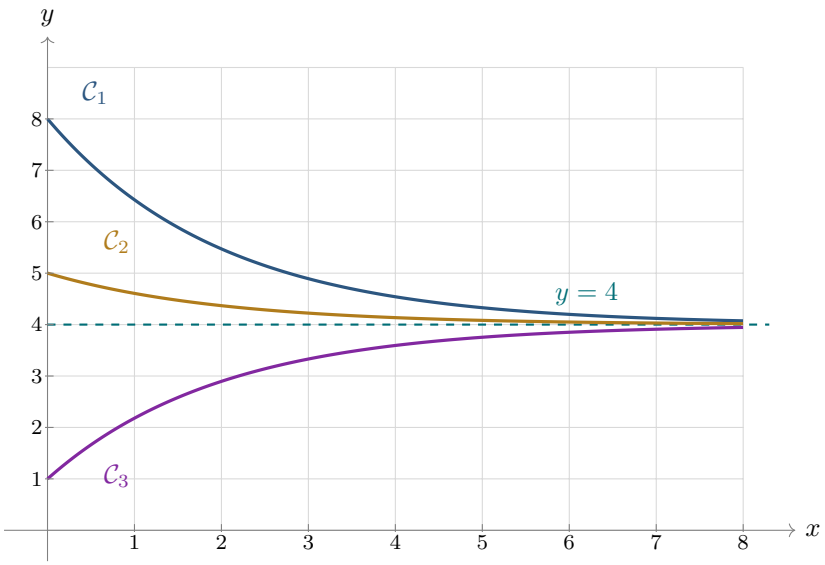
EXERCICE 14 ⋆⋆

Soit f la solution de l'équation différentielle $y' = -0{,}4\,y + 6$ vérifiant $f(0) = 2$.

1. Déterminer la valeur d'équilibre de cette équation.
2. Donner la forme générale des solutions, puis déterminer f.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.
4. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.
5. La fonction f atteint-elle la valeur d'équilibre ? Justifier.
6. Résoudre l'équation $f(x) = 10$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au millième.

EXERCICE 15 ⋆⋆

Le graphique ci-dessous représente trois courbes intégrales d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, ainsi que la droite d'équation $y = 4$ tracée en pointillés.



1. Que représente la droite d'équation $y = 4$ pour cette équation différentielle ? Quelle relation lie alors a et b ?
2. Le signe de a est-il positif ou négatif ? Justifier à partir de l'allure des courbes.
3. On admet que $a = -0{,}5$. En déduire la valeur de b, puis la forme générale des solutions.
4. Déterminer la constante C associée à chacune des trois courbes, par lecture de l'ordonnée en $x = 0$.
5. L'équation admet-elle une solution constante ? Laquelle ?
6. Une courbe intégrale peut-elle traverser la droite d'équation $y = 4$? Justifier.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Une fonction f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$. On sait que $f(0) = 1$, que la valeur d'équilibre vaut 5, et que $f'(0) = 4$.

1. Justifier que f s'écrit sous la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{ax} + 5$, puis déterminer C.
2. En calculant $f'(0)$, déterminer la valeur de a.
3. En déduire la valeur de b, puis l'équation différentielle vérifiée par f.
4. Donner l'expression de $f(x)$ et vérifier les trois conditions de l'énoncé.

Modélisation

EXERCICE 17 ⋆⋆

Un échantillon radioactif contient initialement $N_0 = 10^{12}$ atomes. Sa constante radioactive vaut $\lambda = 0{,}02$ an^{-1}. On note $N(t)$ le nombre d'atomes restants au bout de t années.

1. Justifier que N est solution de l'équation différentielle $N' = -0{,}02\,N$.
2. En déduire l'expression de $N(t)$.

3. Calculer $N(50)$ et en donner une valeur approchée. Quelle proportion de l'échantillon subsiste alors ?
4. Déterminer la demi-vie T de cet isotope. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au centième.
5. Au bout de combien d'années ne reste-t-il plus que 10 % des atomes initiaux ?
6. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$, $N(t+T) = \dfrac{N(t)}{2}$. Interpréter.

EXERCICE 18 ⋆⋆

La datation au carbone 14 repose sur la désintégration de cet isotope, dont la demi-vie vaut $T = 5730$ ans. On note $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$ le nombre d'atomes restants après t années.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, puis une valeur approchée à 10^{-6} près.
2. Un fragment d'os prélevé sur un site archéologique contient 30 % du carbone 14 qu'il possédait de son vivant. Déterminer son âge, arrondi à l'année.
3. Quelle proportion de carbone 14 subsiste au bout de 10 000 ans ? On donnera le résultat en pourcentage, arrondi au dixième.
4. Au bout de combien d'années ne reste-t-il plus que 1 % du carbone 14 initial ?
5. Les appareils de mesure ne détectent pas de façon fiable une proportion inférieure à 1 %. En déduire une limite d'utilisation de cette méthode de datation, et commenter.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Un objet métallique porté à 100 °C est placé dans une pièce maintenue à 22 °C. On note $\theta(t)$ sa température, en degrés Celsius, au bout de t minutes. La loi de Newton donne $\theta' = -k\,(\theta - \theta_{\text{ext}})$ avec $k = 0{,}04$ min^{-1}.

1. Montrer que θ est solution de l'équation différentielle $\theta' = -0{,}04\,\theta + 0{,}88$.
2. Déterminer la valeur d'équilibre de cette équation. Interpréter physiquement.
3. Résoudre l'équation avec la condition initiale $\theta(0) = 100$.
4. Calculer $\theta(15)$ et en donner une valeur approchée au dixième.
5. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 50 °C ? On donnera une valeur approchée au dixième de minute.
6. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$. L'objet atteint-il un jour exactement la température de la pièce ?

EXERCICE 20 ⋆⋆

Une culture de bactéries compte initialement 500 individus. Tant que les ressources sont abondantes, le nombre $N(t)$ de bactéries au bout de t heures vérifie $N' = 0{,}3\,N$.

1. Déterminer l'expression de $N(t)$.
2. Calculer $N(5)$ et en donner une valeur approchée à l'unité.
3. Déterminer le temps de doublement de la population, arrondi au centième d'heure.
4. Au bout de combien de temps la culture atteint-elle 10 000 bactéries ?
5. Que vaut $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$? Ce modèle peut-il rester valable indéfiniment ? Discuter.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Un parachutiste saute d'un avion sans vitesse initiale. Sa vitesse $v(t)$, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ au bout de t secondes, vérifie l'équation différentielle :

$$v' = -0{,}2\,v + 9{,}8$$

la constante 9,8 étant l'accélération de la pesanteur et le terme $-0{,}2\,v$ traduisant les frottements de l'air.

1. Déterminer la valeur d'équilibre de cette équation. On l'appelle *vitesse limite*.
2. Résoudre l'équation avec la condition initiale $v(0) = 0$, et vérifier que $v(t) = 49\left(1 - \text{e}^{-0{,}2\,t}\right)$.
3. Calculer $v(5)$ et en donner une valeur approchée au dixième.
4. Étudier le sens de variation de v sur $[0\,;+\infty[$, puis déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.
5. Au bout de combien de temps le parachutiste atteint-il 40 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$?
6. Le parachutiste atteint-il un jour exactement la vitesse limite ? Justifier mathématiquement, puis commenter physiquement.

Exercices de synthèse

EXERCICE 22 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. Les solutions de $y' = 5y$ sont les fonctions :	$x \mapsto Ce^{5x}$	$x \mapsto 5e^{Cx}$	$x \mapsto Ce^{-5x}$
2. Les solutions de $y' = -2y + 8$ sont les fonctions :	$x \mapsto Ce^{-2x} - 4$	$x \mapsto Ce^{-2x} + 4$	$x \mapsto Ce^{2x} + 4$
3. La valeur d'équilibre de $y' = 3y - 9$ est :	3	-3	9
4. La solution de $y' = y$ vérifiant $y(0) = 2$ est :	$x \mapsto e^{2x}$	$x \mapsto 2e^{x}$	$x \mapsto e^{x} + 1$
5. La fonction $x \mapsto 4e^{-3x}$ est solution de :	$y' = -3y$	$y' = 4y$	$y' = 3y$
6. Si $a < 0$, les solutions non nulles de $y' = ay$ ont pour limite en $+\infty$:	0	$+\infty$	$-\infty$
7. L'équation $y' = 2y$ admet comme solution constante :	aucune	la fonction nulle	toutes les constantes
8. Une équation $y' = ay + b$ avec une condition initiale admet :	aucune solution	une unique solution	une infinité de solutions
9. La demi-vie d'un noyau de constante λ vaut :	$\dfrac{\lambda}{\ln 2}$	$\dfrac{\ln 2}{\lambda}$	$\lambda \ln 2$
10. L'équation $2y' + 6y = 0$ s'écrit aussi :	$y' = 3y$	$y' = -3y$	$y' = -6y$

EXERCICE 23 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. L'équation différentielle $y' = 3y$ admet une infinité de solutions.
2. La fonction nulle est solution de toute équation différentielle de la forme $y' = ay$.
3. La fonction nulle est solution de $y' = 2y + 1$.
4. Si f et g sont solutions de $y' = ay$, alors $f + g$ l'est aussi.
5. Si f et g sont solutions de $y' = ay + b$ avec $b \neq 0$, alors $f + g$ l'est aussi.
6. Deux courbes intégrales distinctes de $y' = ay$ peuvent se couper.

7. Les solutions de $y' = -y + 3$ ont toutes pour limite 3 en $+\infty$.
8. La solution de $y' = 2y$ vérifiant $y(0) = 0$ est la fonction nulle.
9. La demi-vie d'un noyau radioactif dépend de la quantité initiale.
10. Toute solution non nulle de $y' = ay$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

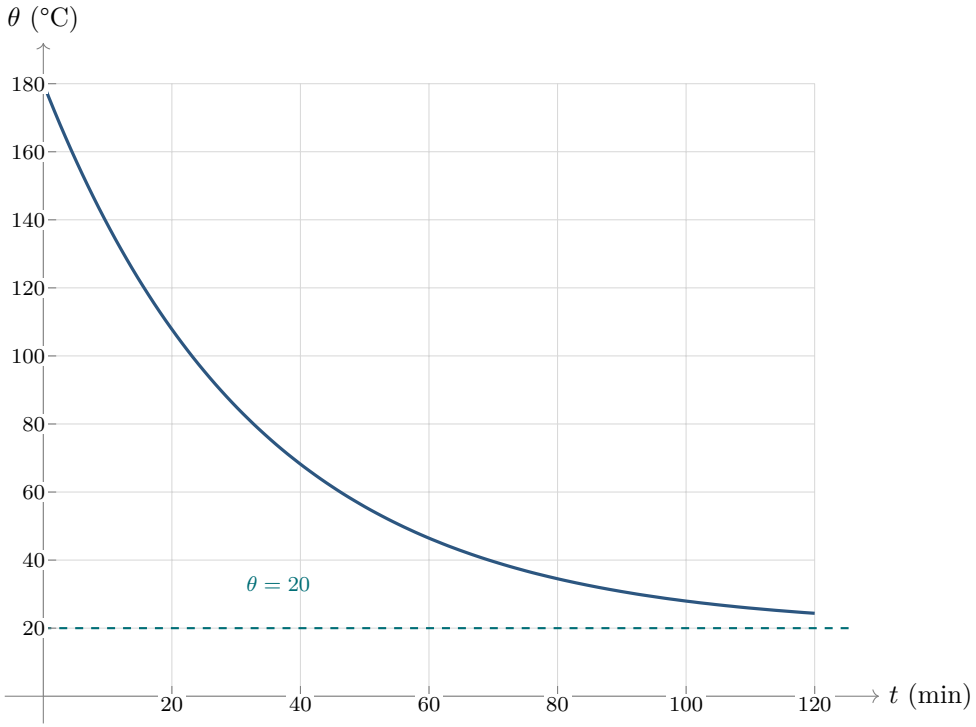
EXERCICE 24 - TYPE BAC ⋆⋆

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -2y+6$, et l'on note f sa solution vérifiant $f(0) = 1$.

1. Déterminer la valeur d'équilibre de (E), puis la forme générale de ses solutions.
2. Démontrer que $f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 3$.
3. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement la première.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.
6. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
7. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
8. Dresser le tableau de variations complet de f.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

Un plat sorti du four à 180 °C est posé dans une cuisine dont la température est de 20 °C. On note $\theta(t)$ sa température au bout de t minutes. On admet que θ est solution de l'équation différentielle $\theta' = -0{,}03\,\theta + 0{,}6$.



1. Lire graphiquement la température initiale du plat, ainsi qu'une valeur approchée de sa température au bout de 60 minutes.
2. Déterminer la valeur d'équilibre de l'équation. Que représente la droite tracée en pointillés ?

3. Résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale $\theta(0) = 180$.
4. Calculer $\theta(30)$ et en donner une valeur approchée au dixième. Comparer à la lecture graphique.
5. Le plat peut être servi lorsque sa température descend à 60 °C. Déterminer au bout de combien de temps, à la minute près.
6. Étudier le sens de variation de θ et déterminer sa limite en $+\infty$. Interpréter.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

Un patient reçoit un médicament par perfusion à débit constant. On note $c(t)$ la concentration du médicament dans le sang, en mg·L^{-1}, au bout de t heures. Elle vérifie :

$$c' = -0{,}25\,c + 2 \qquad \text{avec} \qquad c(0) = 0$$

Le terme $-0{,}25\,c$ traduit l'élimination par l'organisme, et le terme constant 2 l'apport de la perfusion.

1. Déterminer la valeur d'équilibre de cette équation, et l'interpréter.
2. Résoudre l'équation différentielle et vérifier que $c(t) = 8\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25\,t}\right)$.
3. Calculer $c(4)$ et en donner une valeur approchée au centième.
4. Étudier le sens de variation de c sur $[0\,;+\infty[$.
5. Le médicament n'est efficace qu'à partir d'une concentration de 6 mg·L^{-1}. Déterminer au bout de combien de temps le traitement devient efficace.
6. Le seuil de toxicité est fixé à 10 mg·L^{-1}. Démontrer que ce seuil ne sera jamais atteint, quelle que soit la durée de la perfusion.

EXERCICE 27 ⋆⋆

On compare deux isotopes radioactifs : l'iode 131, de demi-vie 8 jours, et le césium 137, de demi-vie 30 ans.

1. Déterminer la constante radioactive λ_{I} de l'iode 131, puis λ_{Cs} pour le césium 137. On précisera les unités.
2. Un échantillon d'iode 131 est mesuré pendant 24 jours. Sans aucun calcul d'exponentielle, déterminer la proportion d'atomes restants. Justifier.
3. Même question pour un échantillon de césium 137 observé pendant 60 ans.
4. Au bout de combien de jours ne reste-t-il plus que 1 % de l'iode 131 initial ?
5. Un accident nucléaire libère les deux isotopes. Lequel pose un problème sanitaire à court terme, lequel à long terme ? Justifier à l'aide des résultats précédents.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' = -2y + 4x$$

Le second membre n'étant plus constant, le théorème 3 ne s'applique pas directement. On va donc reprendre la méthode de sa démonstration.

Partie A : recherche d'une solution particulière.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $\varphi : x \mapsto ax + b$ soit solution de (E).

Partie B : résolution complète.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation $y' = -2y$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution g de (E) vérifiant $g(0) = 3$.

Partie C : étude de la solution obtenue.

5. Calculer $g'(x)$, puis résoudre l'équation $g'(x) = 0$.
6. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$, en donnant la valeur exacte du minimum.
7. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - (2x - 1)] = 0$. Qu'en déduit-on pour la courbe de g ?

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Dans tout l'exercice, a et b désignent deux réels avec $a \neq 0$.

Partie A : structure des solutions.

1. Soient f et g deux solutions de $y' = ay$. Démontrer que $f + g$ et $f - g$ sont également solutions.
2. Soit f une solution de $y' = ay$ et k un réel. Démontrer que kf est solution.
3. Soient f_1 et f_2 deux solutions de $y' = ay + b$. Démontrer que $f_1 - f_2$ est solution de $y' = ay$.
4. En déduire que si l'on connaît *une* solution particulière de $y' = ay + b$, alors on les connaît toutes.

Partie B : redémonstration du théorème 1.

Soit f une solution quelconque de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout réel x :

$$g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$$

5. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g'(x)$.
6. En utilisant le fait que f est solution de $y' = ay$, démontrer que $g'(x) = 0$ pour tout réel x.
7. Qu'en déduit-on pour la fonction g ? Conclure quant à l'expression de f.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Pour tout réel C, on note f_C la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_C(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} + 2$$

1. Vérifier que f_C est solution de l'équation différentielle $y' = -y + 2$.
2. Déterminer C pour que la courbe de f_C passe par le point de coordonnées $(0\,;5)$.
3. Déterminer C pour que $f_C(1) = 0$. On donnera la valeur exacte.
4. Calculer $f'_C(x)$ et étudier le sens de variation de f_C selon le signe de C.

5. Existe-t-il une valeur de C pour laquelle f_C est constante ? Quel lien avec la valeur d'équilibre ?
6. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_C(x)$. Ce résultat dépend-il de C ?
7. Soient C et C' deux réels distincts. Démontrer que les courbes de f_C et $f_{C'}$ n'ont aucun point commun. Quel théorème du cours retrouve-t-on ainsi ?

Pour aller plus loin

EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\text{pour tout réel } x, \qquad f'(x) - \lambda f(x) = \mathrm{e}^x$$

1. Traiter le cas $\lambda \neq 1$. On cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^x$.
2. Traiter le cas $\lambda = 1$. On cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto Cx\mathrm{e}^x$.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

L'analogue discret de l'équation $y' = ay + b$.

Partie A : suites arithmético-géométriques. Soient a et b deux réels, et (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + b$. On se propose de calculer u_n en fonction de n et de u_0.

1. Traiter le cas $a = 1$.
   On suppose désormais $a \neq 1$.
2. Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note ℓ la solution. Dans la question suivante, il est inutile, voire nuisible, de remplacer ℓ par sa valeur : seule est utile l'égalité $\ell = a\ell + b$.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Conclure.
4. À quelles conditions portant sur a et u_0 la suite (u_n) est-elle convergente ?

Partie B : second membre variable. Soient (w_n) une suite réelle, a un réel différent de 0 et de 1, et (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + w_n$. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = \dfrac{u_n}{a^n}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier $z_{n+1} - z_n$.
6. En déduire une expression de z_n sous forme de somme, puis de u_n.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

On se propose de déterminer les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\text{pour tous réels } x \text{ et } y, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2\left(f(x) + f(y)\right)$$

Dans les questions 1 et 2, f est une fonction solution.

1. Calculer $f(0)$. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f'' est constante.
3. Conclure.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Courbes de sous-tangente constante. Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : pour tout réel x, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x n'est pas parallèle à l'axe des abscisses et, si $N(x)$ désigne le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, la distance de $N(x)$ au projeté orthogonal sur l'axe des abscisses du point de la courbe d'abscisse x est constante.

Il est recommandé de faire un dessin.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

La méthode d'Euler. On considère l'équation $y' = y$ avec la condition $y(0) = 1$, dont la solution est la fonction exponentielle. On cherche à en calculer une valeur approchée en un réel $x > 0$ sans utiliser l'exponentielle. Pour cela, on fixe un entier $n \geqslant 1$, on pose $h = \dfrac{x}{n}$, et l'on construit les nombres y_0, y_1, …, y_n par

$$y_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad y_{k+1} = y_k + h\,y_k \quad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

1. Expliquer pourquoi y_k est une valeur approchée de e^{kh}. On pourra utiliser l'approximation d'une fonction par sa tangente, $f(t+h) \approx f(t) + h\,f'(t)$.
2. Montrer que $y_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.
3. En déduire, à l'aide de l'exercice 32 du chapitre 5, que y_n tend vers e^x quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour $x = 1$, calculer y_n pour $n = 10$ et $n = 1\,000$, et comparer à e. Que peut-on dire de l'erreur commise ?
5. Reprendre la question 2 pour l'équation $y' = ay$, $y(0) = 1$, où a est un réel donné.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆⋆

Équation différentielle des fonctions puissances. Soient α un réel strictement positif et f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$. En imitant la démonstration du théorème 1 du cours (ou la partie B de l'exercice 29), montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et vérifie, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\alpha}{x}\,f(x)$;
- il existe un réel C tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = C\,x^\alpha$.

On utilisera les fonctions puissances de l'exercice 31 du chapitre 5.