CORRIGÉ – CHAPITRE 9

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Périodicité, parité et valeurs remarquables

EXERCICE 1 ⋆

On lit les valeurs sur le cercle trigonométrique, en se ramenant aux angles du premier quadrant à l'aide de la parité et des symétries.

	Valeur exacte	**Justification**
a)	$\frac{1}{2}$	valeur remarquable du tableau du cours
b)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	valeur remarquable
c)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, et $\cos(\pi - u) = -\cos(u)$
d)	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, et $\sin(\pi - u) = \sin(u)$
e)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	le cosinus est pair : $\cos(-u) = \cos(u)$
f)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	le sinus est impair : $\sin(-u) = -\sin(u)$
g)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$
h)	-1	le point associé est le bas du cercle trigonométrique

EXERCICE 2 ⋆

On retranche ou l'on ajoute un multiple entier de 2π, ce qui ne change ni le cosinus ni le sinus.

a) On retranche deux tours complets :

$$\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$$

b)

$$\frac{17\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi}{4} + 2 \times 2\pi$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

c)

$$-\frac{25\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{\pi}{6} - 2\times 2\pi$$

$$\boxed{\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

d)

$$\frac{15\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 8\pi = -\frac{\pi}{2} + 4\times 2\pi$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1}$$

Démonstration. Soit k un entier relatif et x un réel. D'après la proposition 1 du cours, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$. En additionnant ces deux égalités :

$$\boxed{\cos\left(x+2k\pi\right) + \sin\left(x+2k\pi\right) = \cos(x) + \sin(x)}$$

EXERCICE 3 ⋆

On calcule à chaque fois $f(-x)$, en utilisant $\cos(-u) = \cos(u)$ et $\sin(-u) = -\sin(u)$.

a) $f(-x) = \cos(-3x) = \cos(3x) = f(x)$: $\boxed{f \text{ est paire}}$

b) $f(-x) = \sin(-x) + (-x) = -\sin(x) - x = -\big(\sin(x) + x\big) = -f(x)$: $\boxed{f \text{ est impaire}}$

c) $f(-x) = (-x)^2\cos(-x) = x^2\cos(x) = f(x)$: $\boxed{f \text{ est paire}}$ *C'est le produit de deux fonctions paires.*

d) $f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$: $\boxed{f \text{ est impaire}}$ *C'est le produit d'une fonction impaire par une fonction paire.*

e) $f(-x) = \cos(x) - \sin(x)$, qui n'est ni $f(x)$ ni $-f(x)$. Deux contre-exemples le confirment :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{donc } f \text{ n'est pas paire}$$

$$f(0) = 1 \neq 0 \quad \text{donc } f \text{ n'est pas impaire}$$

Une fonction impaire vérifie toujours $f(0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$.

$$\boxed{f \text{ n'est ni paire ni impaire}}$$

f) Comme $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, on a $1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3$: le dénominateur est toujours strictement positif, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est impaire}}$$

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Soit x un réel. Alors :

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3x + 3\times\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3x+2\pi\right) = \cos(3x) = f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est périodique de période } \frac{2\pi}{3}}$$

2. $$g(x+4\pi) = \sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$$

$$\boxed{g \text{ est périodique de période } 4\pi}$$

3. Les deux exemples suggèrent que la période est inversement proportionnelle au coefficient de x :

$$\boxed{\text{Conjecture : } x \mapsto \sin(ax) \text{ est périodique de période } \frac{2\pi}{a}}$$

Démonstration. Pour tout réel x :

$$\sin\left(a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)\right) = \sin\left(ax+2\pi\right) = \sin(ax)$$

Les deux premières questions en sont les cas particuliers $a=3$ et $a=\frac{1}{2}$.

4. Raisonnons par l'absurde en supposant h périodique de période $T>0$. L'égalité $h(x+T)=h(x)$ s'écrit alors, pour tout réel x :

$$x+T+\sin(x+T) = x+\sin(x) \qquad \text{soit} \qquad \sin(x+T)-\sin(x) = -T$$

Appliquons-la successivement à deux valeurs bien choisies. Pour $x=0$:

$$\sin(T)-0 = -T \qquad \text{donc} \qquad \sin(T) = -T$$

Pour $x=-T$:

$$\sin(0)-\sin(-T) = -T \qquad \text{donc} \qquad \sin(T) = -T \text{ devient } \sin(T) = T$$

On aurait donc $T=-T$, c'est-à-dire $T=0$, ce qui contredit $T>0$.

$$\boxed{h \text{ n'est pas périodique}}$$

Intuitivement, le terme x fait dériver la courbe vers le haut : le motif ne peut pas se répéter à l'identique.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. D'après la proposition 1, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, donc :

$$\sin^2(x) = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

D'où $\sin(x) = \pm\frac{4}{5}$. Comme $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, le sinus est positif :

$$\boxed{\sin(x) = \frac{4}{5}}$$

2. $$\cos^2(x) = 1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

D'où $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. Comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$, le cosinus est positif :

$$\boxed{\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

3. On reconnaît $u^2 - v^2$ avec $u = \cos^2(x)$ et $v = \sin^2(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big)\underbrace{\big(\cos^2(x) + \sin^2(x)\big)}_{=1} + 2\sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2\sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = 1 \text{ pour tout réel } x}$$

4. On développe l'identité remarquable :

$$(\cos(x) + \sin(x))^2 = \underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}_{=1} + 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\boxed{(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1 + 2\sin(x)\cos(x)}$$

Lecture graphique

EXERCICE 6 ⋆

1. Le motif se répète tous les π : par exemple, la courbe atteint son maximum en 0, puis de nouveau en π.

$$\boxed{\text{La période vaut } \pi}$$

Or la période de $x \mapsto \cos(bx)$ vaut $\dfrac{2\pi}{b}$, d'où $\dfrac{2\pi}{b} = \pi$: $\boxed{b = 2}$

2. La courbe oscille entre -3 et 3 :

$$\boxed{\text{maximum } 3 \quad ; \quad \text{minimum } -3 \quad ; \quad a = 3}$$

3.

$$\boxed{f(x) = 3\cos(2x)}$$

4. Le maximum 3 est atteint lorsque $\cos(2x) = 1$, ce que la courbe montre en 0, π et 2π. Le minimum -3 correspond à $\cos(2x) = -1$:

$$\boxed{\text{maximum en } x = 0,\ \pi,\ 2\pi \quad ; \quad \text{minimum en } x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}}$$

5. La courbe coupe l'axe des abscisses quatre fois sur $[0\,;2\pi]$. Par le calcul :

$$3\cos(2x) = 0 \iff \cos(2x) = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

En ne gardant que les valeurs de $[0\,;2\pi]$:

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}}$$

6. Graphiquement, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Par le calcul :

$$f(-x) = 3\cos(-2x) = 3\cos(2x) = f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est paire}}$$

EXERCICE 7 ⋆

1. On compare période, maximum et minimum.

Courbe	Période	Max	Min	Expression
$\mathcal{C}_1$	2π	1	-1	$x \mapsto \sin(x)$
$\mathcal{C}_2$	2π	2	-2	$x \mapsto 2\sin(x)$
$\mathcal{C}_3$	π	1	-1	$x \mapsto \sin(2x)$
$\mathcal{C}_4$	2π	2	0	$x \mapsto \sin(x)+1$

   Les courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$ ont le même maximum : c'est le *minimum* qui les départage. Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ ont les mêmes bornes : c'est la *période* qui les départage.

2. $$\boxed{\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2 \text{ et } \mathcal{C}_3 \text{ sont impaires}}$$

   En effet $\sin(-x) = -\sin(x)$, $2\sin(-x) = -2\sin(x)$ et $\sin(-2x) = -\sin(2x)$. Leurs courbes sont bien symétriques par rapport à l'origine.

3. La fonction $x \mapsto \sin(x)+1$ vérifie $f(0) = 1 \neq 0$: elle ne peut donc pas être impaire, et $f(-x) = -\sin(x)+1 \neq f(x)$ interdit la parité.

   $$\boxed{\mathcal{C}_4 \text{ n'est ni paire ni impaire}}$$

   $$\boxed{\text{On passe de la courbe de } \sin \text{ à } \mathcal{C}_4 \text{ par la translation de vecteur } \vec{\jmath}}$$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. La droite $y = \dfrac{1}{2}$ coupe la courbe en quatre points sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

   $$\boxed{S = \left\{-\frac{5\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{3}\right\}}$$

   En effet $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, et l'on obtient les autres solutions par parité puis par périodicité.

2. De même, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

   $$\boxed{S = \left\{-\frac{5\pi}{4}\,;-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right\}}$$

3. Sur $[0\,;2\pi]$, la courbe est au-dessus de la droite $y = \dfrac{1}{2}$ au début et à la fin de l'intervalle :

   $$\boxed{S = \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]}$$

4. La courbe est strictement en dessous de $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ entre les deux points d'intersection situés dans $[0\,;2\pi]$:

   $$\boxed{S = \left]\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right[}$$

5. La fonction étant 2π-périodique, chaque solution se reproduit indéfiniment :

$$\boxed{\text{L'équation admet une infinité de solutions sur } \mathbb{R}}$$

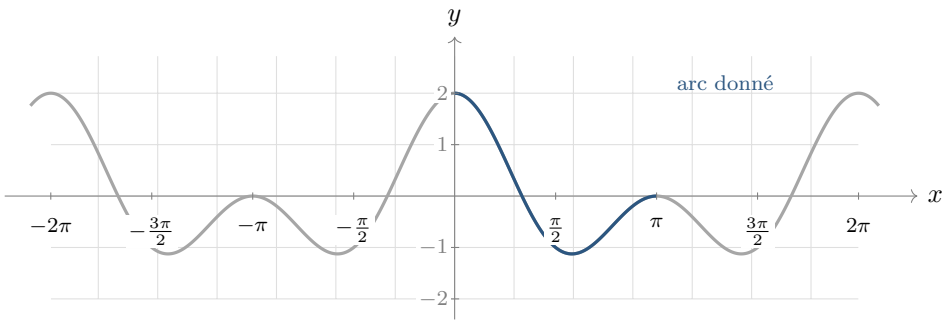
$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. On lit les ordonnées aux extrémités de l'arc tracé :

$$\boxed{f(0) = 2 \qquad ; \qquad f(\pi) = 0}$$

2. et 3. La fonction étant paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on complète sur $[-\pi\,;0]$ par cette symétrie. Elle est ensuite 2π-périodique, donc on reproduit le motif obtenu sur $[-\pi\,;\pi]$ par translations successives de vecteur $2\pi\,\vec{\imath}$.



En bleu ardoise l'arc fourni, en gris tout le reste, obtenu sans aucun calcul.

3. La parité donne directement :

$$\boxed{f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1}$$

La périodicité permet ensuite de retrancher 2π :

$$\boxed{f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2} - 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1}$$

4. Le minimum est atteint une fois sur $[0\,;\pi]$, donc deux fois sur $[-\pi\,;\pi]$ par symétrie, et le motif se répète une fois de chaque côté sur $[-2\pi\,;2\pi]$:

$$\boxed{\text{Le minimum est atteint 4 fois sur } [-2\pi\,;2\pi]}$$

EXERCICE 10 ⋆

On utilise $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, sans oublier le signe moins de la seconde formule.

a) $\boxed{f'(x) = 3\cos(x)}$

b) $\boxed{f'(x) = -\sin(x) - 2}$

c) $\boxed{f'(x) = -5\sin(x) + \cos(x)}$

d) $\boxed{f'(x) = 2x + 4\sin(x)}$

e) $\boxed{f'(x) = \cos(x) + \sin(x)}$

f) $\boxed{f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{2}}$

En d), la dérivée de $-4\cos(x)$ vaut $-4 \times (-\sin(x)) = +4\sin(x)$: les deux signes moins se compensent.

EXERCICE 11 ⋆

On applique $\big(\sin(u)\big)' = u'\cos(u)$ et $\big(\cos(u)\big)' = -u'\sin(u)$.

	$f(x)$	$u(x)$ et $u'(x)$	$f'(x)$
a)	$\sin(3x)$	$u = 3x,\ u' = 3$	$3\cos(3x)$
b)	$\cos(2x-1)$	$u = 2x-1,\ u' = 2$	$-2\sin(2x-1)$
c)	$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$	$u = \frac{x}{2},\ u' = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
d)	$\cos\left(x^2\right)$	$u = x^2,\ u' = 2x$	$-2x\sin\left(x^2\right)$
e)	$\sin\left(x^3+x\right)$	$u = x^3+x,\ u' = 3x^2+1$	$(3x^2+1)\cos\left(x^3+x\right)$
f)	$\cos(-4x+\pi)$	$u = -4x+\pi,\ u' = -4$	$4\sin(-4x+\pi)$

En f), les deux signes moins se compensent à nouveau : $-(-4)\sin(u) = +4\sin(u)$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

a) Produit $u = x$ et $v = \cos(x)$:

$$f'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x)) = \boxed{\cos(x) - x\sin(x)}$$

b) Produit $u = \sin(x)$ et $v = \cos(x)$:

$$f'(x) = \cos(x) \times \cos(x) + \sin(x) \times (-\sin(x)) = \boxed{\cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

On reconnaît $\cos(2x)$.

c) Composée : $f = u^2$ avec $u = \sin(x)$, donc $f' = 2u'u$:

$$f'(x) = 2\cos(x)\sin(x) = \boxed{2\sin(x)\cos(x)}$$

On reconnaît $\sin(2x)$.

d) Quotient $u = \sin(x)$ et $v = x$:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}}$$

e) Composée : $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v = 2 + \cos(x)$, donc $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$:

$$f'(x) = -\frac{-\sin(x)}{(2+\cos(x))^2} = \boxed{\frac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}}$$

f) Composée : $f = \mathrm{e}^u$ avec $u = \sin(x)$, donc $f' = u'\mathrm{e}^u$:

$$\boxed{f'(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}}$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

On utilise $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

	$f(x)$	a	$f(a)$; $f'(a)$	**Tangente**
a)	$\sin(x)$	0	0 ; 1	$y = x$
b)	$\cos(x)$	0	1 ; 0	$y = 1$
c)	$\sin(x)$	$\frac{\pi}{2}$	1 ; 0	$y = 1$
d)	$\cos(2x)$	$\frac{\pi}{4}$	0 ; -2	$y = -2x + \frac{\pi}{2}$
e)	$x\sin(x)$	π	0 ; $-\pi$	$y = -\pi x + \pi^2$

Détail de d) : $f'(x) = -2\sin(2x)$, donc $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$, et $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Détail de e) : $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, donc $f'(\pi) = 0 + \pi \times (-1) = -\pi$.

Les questions b) et c) donnent la même tangente $y = 1$:

Les deux courbes admettent une tangente horizontale, car elles y atteignent leur maximum

C'est cohérent avec le fait qu'en un extremum, le nombre dérivé s'annule.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Le cours donne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$. Toute la technique consiste à faire apparaître ces quotients.

a) On multiplie et divise par 5 :

$$\frac{\sin(5x)}{x} = 5 \times \frac{\sin(5x)}{5x}$$

Lorsque x tend vers 0, $5x$ tend vers 0 et le quotient tend vers 1 :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5}$$

b)

$$\frac{\sin(x)}{3x} = \frac{1}{3} \times \frac{\sin(x)}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{3x} = \frac{1}{3}}$$

c) On fait apparaître les deux quotients de référence :

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{3x}{\sin(3x)} \times \frac{2x}{3x}$$

Les deux premiers facteurs tendent vers 1, le troisième vaut $\frac{2}{3}$:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{2}{3}}$$

d) C'est l'inverse du quotient de référence, dont la limite 1 est non nulle :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1}$$

e)

$$\frac{\cos(x)-1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos(x)-1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{2x} = 0}$$

f)

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \times \cos(x)$$

Le premier facteur tend vers 1 et le second vers $\cos(0) = 1$:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} = 1}$$

EXERCICE 15 ⋆

Une primitive F de f est une fonction dont la dérivée est f. On lit donc les formules du cours à l'envers, sans oublier de compenser le coefficient intérieur par sa division.

	$f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Vérification** $F'(x)$
a)	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\sin' = \cos$
b)	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$(-\cos)' = +\sin$
c)	$3\cos(x) - 2\sin(x)$	$3\sin(x) + 2\cos(x)$	$3\cos(x) - 2\sin(x)$
d)	$\cos(2x)$	$\frac{1}{2}\sin(2x)$	$\frac{1}{2} \times 2\cos(2x) = \cos(2x)$
e)	$\sin(3x-1)$	$-\frac{1}{3}\cos(3x-1)$	$-\frac{1}{3} \times (-3\sin(3x-1))$
f)	$\cos(x) + x$	$\sin(x) + \frac{x^2}{2}$	$\cos(x) + x$
g)	$\sin(x)\cos(x)$	$\frac{1}{2}\sin^2(x)$	$\frac{1}{2} \times 2\sin(x)\cos(x)$
h)	$\cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}$	$\mathrm{e}^{\sin(x)}$	$\cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}$

En d) et e), le facteur $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{3}$ compense exactement le coefficient qui apparaît lors de la dérivation de la composée : c'est le point délicat.

En g), on reconnaît la forme $u'u$ avec $u = \sin(x)$, dont une primitive est $\frac{u^2}{2}$. On aurait aussi pu écrire $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, dont une primitive est $-\frac{1}{4}\cos(2x)$: les deux réponses diffèrent d'une constante, ce qui est normal.

En h), on reconnaît $u'\mathrm{e}^u$ avec $u = \sin(x)$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

On applique $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, en utilisant les primitives de l'exercice précédent.

a)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = \boxed{1}$$

b)
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = \boxed{2}$$

c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos(\pi) + \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

d)
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = \boxed{2}$$

e)
$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = \boxed{0}$$

f)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(\cos(x) - \sin(x)\big)\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(x) + \cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + 1) = \boxed{\sqrt{2} - 1}$$

Explication de e). Sur $[0\,;\pi]$ le sinus est positif, sur $[\pi\,;2\pi]$ il est négatif. Plus précisément, le sinus vérifie $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$: à chaque valeur prise sur la première moitié correspond son opposée sur la seconde.

Les deux contributions se compensent exactement, d'où une intégrale nulle

Attention : une intégrale nulle ne signifie pas que l'aire est nulle, comme le montre l'exercice 28.

Étude et représentation graphique

EXERCICE 17 ⋆

1. Le cosinus est l'abscisse du point du cercle : il est positif sur le premier et le quatrième quadrant, c'est-à-dire pour $x < \frac{\pi}{2}$ et $x > \frac{3\pi}{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Le sinus est l'ordonnée : il est positif au-dessus de l'axe horizontal, donc sur $[0\,;\pi]$.

x	0		π		2π
$\sin(x)$		$+$	0	$-$	

3. On combine les deux lignes précédentes dans un même tableau, en faisant figurer les trois valeurs remarquables $\dfrac{\pi}{2}$, π et $\dfrac{3\pi}{2}$.

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π		$\dfrac{3\pi}{2}$		2π
$\sin(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\sin(x)\cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

4. On lit la dernière ligne du tableau :

$$\boxed{S = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]}$$

On peut le retrouver autrement : $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$*, qui est positif lorsque* $2x$ *appartient à* $[0\,;\pi]$ *ou à* $[2\pi\,;3\pi]$.

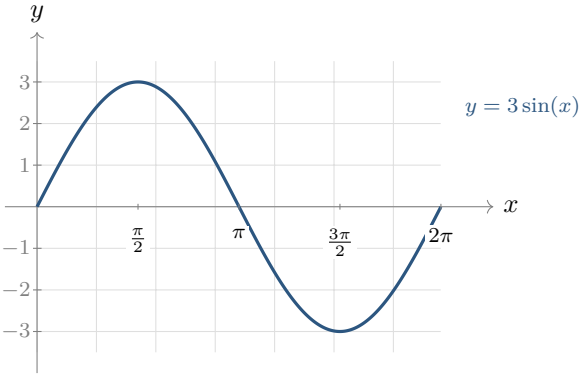
EXERCICE 18 ⋆⋆

1. (a) $f'(x) = 3\cos(x)$, qui est du signe de $\cos(x)$: positif sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, négatif sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, positif sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$.

(b)

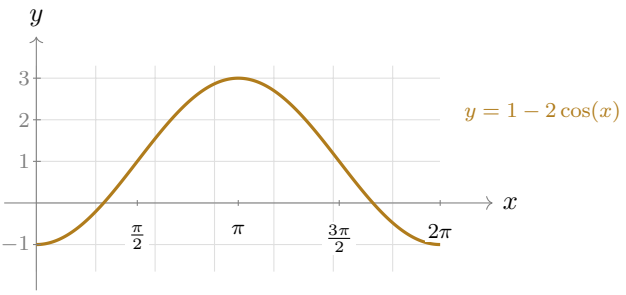
x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	3	↘	-3	↗	0

(c)



2. $g'(x) = 2\sin(x)$, qui est du signe de $\sin(x)$: positif sur $[0\,;\pi]$, négatif sur $[\pi\,;2\pi]$. Les valeurs sont $g(0) = 1 - 2 = -1$, $g(\pi) = 1 + 2 = 3$ et $g(2\pi) = -1$.

x	0		π		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	3	↘	-1



EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Pour tout réel x :

$$f(x+\pi) = \cos\left(2(x+\pi)\right) = \cos\left(2x + 2\pi\right) = \cos(2x) = f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est périodique de période } \pi}$$

2.

$$f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{f \text{ est paire}}$$

3. La périodicité permet de se limiter à un intervalle de longueur π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. La parité permet de diviser encore cet intervalle par deux.

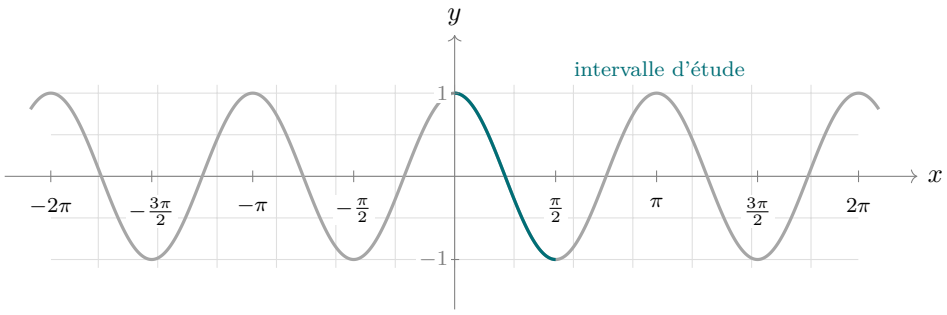
$$\boxed{\text{Il suffit d'étudier } f \text{ sur } \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]}$$

On complète ensuite par **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées** sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis par **translations de vecteur** $\pi\,\vec{\imath}$ sur $\mathbb{R}$.

4. $f'(x) = -2\sin(2x)$. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, le réel $2x$ décrit $[0\,;\pi]$, intervalle sur lequel le sinus est positif. Donc $f'(x) \leqslant 0$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	↘	-1

5.



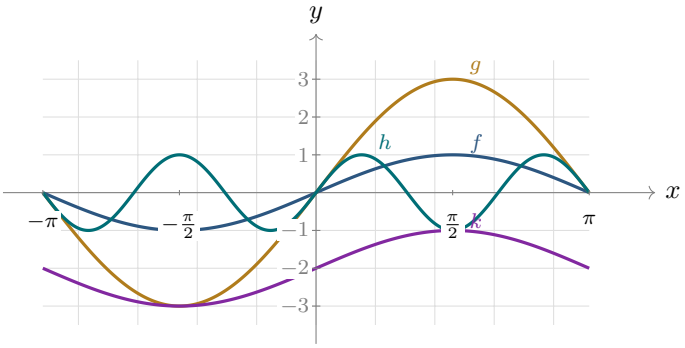
En bleu pétrole la portion réellement étudiée, en gris tout le reste, obtenu sans aucun calcul supplémentaire.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1.

Fonction	Maximum	Minimum	Période
$f(x) = \sin(x)$	1	-1	2π
$g(x) = 3\sin(x)$	3	-3	2π
$h(x) = \sin(3x)$	1	-1	$\dfrac{2\pi}{3}$
$k(x) = \sin(x) - 2$	-1	-3	2π

2.



3.

De f à g : dilatation verticale de facteur 3
De f à k : translation de vecteur $-2\vec{\jmath}$

4.

maximum a ; minimum $-a$; période $\dfrac{2\pi}{b}$

Le coefficient a règle l'*amplitude*, le coefficient b règle la *fréquence* : plus b est grand, plus les oscillations sont resserrées.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Parité. Pour tout réel x :

$$f(-x) = 2\cos(-x) + \cos(-2x) = 2\cos(x) + \cos(2x) = f(x)$$

Périodicité. Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \cos(2x)$ sont toutes deux 2π-périodiques, donc leur somme l'est aussi :

$$f(x + 2\pi) = 2\cos(x + 2\pi) + \cos(2x + 4\pi) = 2\cos(x) + \cos(2x) = f(x)$$

$\boxed{f \text{ est paire et } 2\pi\text{-périodique : il suffit de l'étudier sur } [0\,;\pi]}$

2. On dérive, puis on utilise $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin(x) - 2\sin(2x) \\ &= -2\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) \\ &= \boxed{-2\sin(x)(1+2\cos(x))} \end{aligned}$$

3. Sur $[0\,;\pi]$, le facteur $\sin(x)$ est positif, et il ne s'annule qu'aux bornes. Le facteur $1+2\cos(x)$ s'annule lorsque $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = \dfrac{2\pi}{3}$; il est positif avant, négatif après.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$-2\sin(x)$	0	$-$		$-$	0
$1+2\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

4. Les valeurs demandées sont :

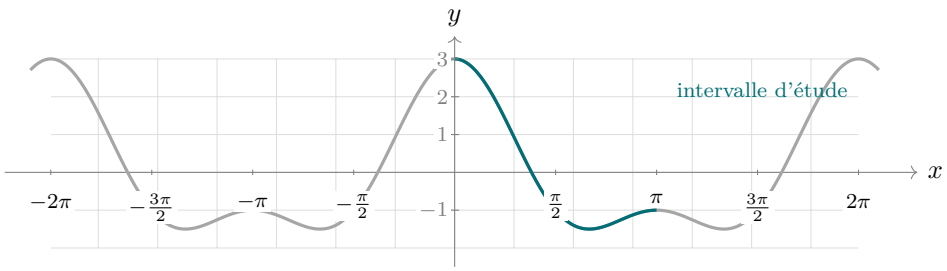
$$f(0) = 2\times 1 + 1 = \boxed{3}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

$$f(\pi) = 2\times(-1) + \cos(2\pi) = -2 + 1 = \boxed{-1}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1

5.



En bleu pétrole la portion étudiée, en gris la courbe complète, obtenue par symétrie puis translations.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Le tableau donne directement :

$$\boxed{f(0)=0 \quad ; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2 \quad ; \quad f(\pi)=0}$$

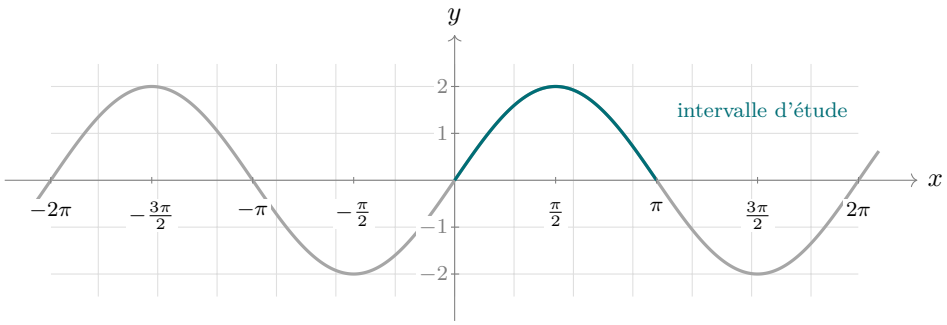
2. La fonction étant impaire :

$$\boxed{f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2}$$

La fonction étant 2π-périodique :

$$\boxed{f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=f\left(\frac{5\pi}{2}-2\pi\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2}$$

3. L'imparité donne une symétrie par rapport à l'origine, puis la périodicité une répétition tous les 2π.



L'allure obtenue est celle de $x \mapsto 2\sin(x)$, qui vérifie effectivement toutes les conditions de l'énoncé.

4. Sur $[-\pi\,;0]$, l'imparité inverse le sens de variation par rapport à $[0\,;\pi]$: la fonction décroît puis croît, en passant par le minimum -2 en $-\dfrac{\pi}{2}$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

5. Sur une période, la droite $y=1$ coupe la courbe deux fois. L'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$ contient deux périodes complètes :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x)=1 \text{ admet 4 solutions sur } [-2\pi\,;2\pi]}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**B**	C'est le théorème 1 : $\cos' = -\sin$. Le signe moins s'oublie facilement.
2	**A**	$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc le cosinus vaut l'opposé de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
3	**B**	Avec $u = 3x$ et $u' = 3$, la proposition 4 donne $3\cos(3x)$.
4	**C**	La période de $x \mapsto \cos(bx)$ vaut $\frac{2\pi}{b}$, soit ici $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
5	**B**	C'est la proposition 3, qui exprime le nombre dérivé du sinus en 0.
6	**B**	$\sin(-x) = -\sin(x)$: la courbe est symétrique par rapport à l'origine.
7	**A**	C'est la proposition 1, conséquence du théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique.
8	**B**	$f(0) = 0$ et $f'(0) = \cos(0) = 1$, d'où $y = x$.
9	**B**	Sur cet intervalle le point du cercle est dans le deuxième quadrant : son abscisse est négative.
10	**B**	Le cosinus est une fonction paire. La réponse A correspondrait au sinus.

EXERCICE 24 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Vraie**. C'est la proposition 1 : le cosinus est l'abscisse d'un point du cercle de rayon 1, donc $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
2. **Fausse**. Contre-exemple avec $x = \frac{\pi}{2}$:
$$\sin(\pi) = 0 \qquad \text{alors que} \qquad 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$
La formule correcte est $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
3. **Fausse**. Le cosinus est décroissant sur $[0\,;\pi]$, mais croissant sur $[\pi\,;2\pi]$. Contre-exemple : $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(2\pi) = 1$, donc la fonction croît entre ces deux valeurs.
4. **Vraie**. Si $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x, alors en appliquant deux fois :
$$f(x + 4\pi) = f\big((x + 2\pi) + 2\pi\big) = f(x + 2\pi) = f(x)$$
Attention : 4π est une période, mais ce n'est pas la *plus petite.*
5. **Fausse**. Contre-exemple avec $f(x) = \cos(x)$ (paire) et $g(x) = \sin(x)$ (impaire) : leur somme $\cos(x) + \sin(x)$ n'est ni paire ni impaire, comme l'a montré l'exercice 3.
6. **Vraie**. Si $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x, on dérive les deux membres. La dérivée du membre de gauche vaut $f'(x + 2\pi)$ d'après la dérivation d'une composée, d'où $f'(x + 2\pi) = f'(x)$.
7. **Fausse**. Le cosinus est toujours inférieur ou égal à 1 : l'équation $\cos(x) = 2$ n'admet *aucune* solution.

8. **Fausse**. L'inégalité $\sin(x) \leqslant x$ n'est vraie que pour $x \geqslant 0$, comme l'établit l'exercice 30. Contre-exemple avec $x = -\dfrac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \qquad \text{alors que} \qquad -\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57$$

On a donc $\sin(x) > x$.

9. **Vraie**. C'est le produit de deux fonctions impaires :

$$f(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x) \times (-\sin(x)) = x\sin(x) = f(x)$$

10. **Vraie**. $\sin'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$: la tangente est horizontale, ce qui est cohérent avec le maximum atteint en ce point.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

1. $$\boxed{f'(x) = 1 - \sin(x)}$$

2. Pour tout réel x, $\sin(x) \leqslant 1$, donc $1 - \sin(x) \geqslant 0$:

$$\boxed{f'(x) \geqslant 0 \text{ sur } [0\,;2\pi]}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\sin(x) = 1$, ce qui, sur $[0\,;2\pi]$, ne se produit qu'en un seul point :

$$\boxed{f'(x) = 0 \text{ uniquement pour } x = \frac{\pi}{2}}$$

3. La dérivée est positive et ne s'annule qu'en un point isolé : la décroissance n'est jamais interrompue.

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗		↗	$2\pi+1$

$$f(0) = 0 + \cos(0) = \boxed{1} \qquad ; \qquad f(2\pi) = 2\pi + \cos(2\pi) = \boxed{2\pi + 1}$$

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;2\pi]}$$

4. On calcule $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$\boxed{T : y = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\text{La tangente est horizontale, sans que } f \text{ y admette d'extremum}}$$

C'est le point important : la dérivée s'annule sans changer de signe. La courbe présente en ce point un simple palier avant de poursuivre sa montée.

5. Non. On a $f(0) = 1$, tandis que $f(2\pi) = 2\pi + 1 \neq 1$: la fonction ne reprend pas la même valeur après un tour.

$$\boxed{f \text{ n'est pas périodique}}$$

Le terme x fait croître la fonction indéfiniment, alors que seul $\cos(x)$ est périodique.

6. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;2\pi]$, avec $f(0) = 1$ et $f(2\pi) = 2\pi+1 \approx 7{,}28$. Comme 4 est compris entre ces deux valeurs, le théorème des valeurs intermédiaires garantit :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 4 \text{ admet une unique solution sur } [0\,;2\pi]}$$

La calculatrice donne alors :

$$\boxed{x \approx 4{,}35}$$

Vérification : $4{,}35 + \cos(4{,}35) \approx 4{,}35 - 0{,}35 \approx 4$.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

1.

$$h(0) = 5 + 3\sin(0) = \boxed{5 \text{ m}}$$

$$h(3) = 5 + 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 + 3 = \boxed{8 \text{ m}}$$

$$h(9) = 5 + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5 - 3 = \boxed{2 \text{ m}}$$

À minuit, la hauteur d'eau est de 5 m
À 3 h, elle est maximale : c'est la marée haute
À 9 h, elle est minimale : c'est la marée basse

2. Pour tout t :

$$h(t+12) = 5 + 3\sin\left(\frac{\pi(t+12)}{6}\right) = 5 + 3\sin\left(\frac{\pi t}{6} + 2\pi\right) = h(t)$$

$$\boxed{h \text{ est périodique de période } 12}$$

$$\boxed{\text{Le cycle des marées se répète toutes les 12 heures}}$$

3. Avec $u(t) = \dfrac{\pi t}{6}$ et $u'(t) = \dfrac{\pi}{6}$:

$$h'(t) = 3 \times \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)}$$

Sur $[0\,;12]$, le réel $\dfrac{\pi t}{6}$ décrit $[0\,;2\pi]$. Le cosinus y est positif pour $\dfrac{\pi t}{6} < \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $t < 3$, puis négatif jusqu'à $\dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{3\pi}{2}$, soit $t = 9$, puis à nouveau positif.

4.

t	0		3		9		12
$h'(t)$		+	0	−	0	+	
$h(t)$	5	↗	8	↘	2	↗	5

$$\boxed{\text{Marée haute à 3 h} \quad ; \quad \text{marée basse à 9 h}}$$

5. $$5+3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\geqslant 6{,}5 \iff \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\geqslant \frac{1}{2}$$

Posons $X=\dfrac{\pi t}{6}$, qui décrit $[0\,;2\pi]$ lorsque t décrit $[0\,;12]$. On sait que $\sin(X)\geqslant\dfrac{1}{2}$ pour $X\in\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$, d'où :

$$\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi t}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}\iff 1\leqslant t\leqslant 5$$

$$\boxed{S=[1\,;5]}$$

6. La période valant 12 heures, le phénomène se reproduit à l'identique entre 12 h et minuit :

$$\boxed{\text{Le port est accessible de 1 h à 5 h, puis de 13 h à 17 h}}$$

Soit huit heures d'accès par jour.

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

1. $$f(-x)=\sin^2(-x)=(-\sin(x))^2=\sin^2(x)=f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est paire}}$$

Le carré efface le signe : une fonction impaire élevée au carré devient paire.

2. Pour tout réel x :

$$f(x+\pi)=\sin^2(x+\pi)=(-\sin(x))^2=\sin^2(x)=f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est périodique de période } \pi}$$

3. La périodicité permet de se limiter à un intervalle de longueur π, par exemple $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, et la parité de le réduire de moitié.

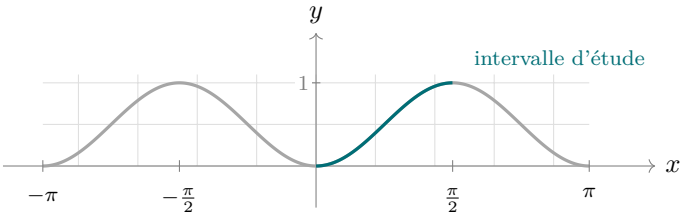
$$\boxed{\text{Il suffit d'étudier } f \text{ sur } \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]}$$

4. On dérive la composée $f=u^2$ avec $u=\sin(x)$:

$$f'(x)=2\sin(x)\cos(x)=\boxed{\sin(2x)}$$

5. Sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, le réel $2x$ décrit $[0\,;\pi]$, où le sinus est positif.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	1

6. 

La courbe reste au-dessus de l'axe des abscisses, ce qui est logique puisque f est un carré.

7. On part de l'identité $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, vue en Première. En isolant $\sin^2(x)$:

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$\boxed{\text{Oui, ce résultat était prévisible}}$$

En effet, la question 2 a établi que f est π-périodique, ce qui est la période de $x \mapsto \cos(2x)$; et la question 5 montre que f oscille entre 0 et 1, ce qui est exactement l'amplitude de $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. La courbe de f n'est donc qu'une sinusoïde, remontée d'une demi-unité et d'amplitude divisée par deux.

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Pour $x \in [0\,;\pi]$, le point du cercle trigonométrique associé à x se situe au-dessus de l'axe horizontal : son ordonnée est positive.

$$\boxed{\sin(x) \geqslant 0 \text{ sur } [0\,;\pi]}$$

2. La fonction étant continue et positive sur $[0\,;\pi]$, l'aire du domaine situé sous sa courbe est donnée par l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = 1 + 1 = \boxed{2 \text{ unités d'aire}}$$

3.
$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = -1 + 1 = \boxed{0}$$

$$\boxed{\text{Non, ce nombre ne représente pas une aire}}$$

Sur $[\pi\,;2\pi]$, la fonction est négative : l'intégrale y compte l'aire *négativement*. Les deux morceaux, de même aire 2, se compensent donc exactement.

4. Il suffit d'additionner les deux aires, chacune comptée positivement :

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{totale}} = 2 + 2 = 4 \text{ unités d'aire}}$$

On peut aussi écrire $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x = 4$.

5.
$$\mu = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{\mu = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637}$$

6. Le maximum du sinus vaut 1, et $\dfrac{2}{\pi} \approx 0{,}637 < 1$.

$$\boxed{\text{Oui, c'était prévisible}}$$

La valeur moyenne d'une fonction est toujours comprise entre son minimum et son maximum sur l'intervalle, ici entre 0 et 1. Géométriquement, μ est la hauteur du rectangle de base $[0\,;\pi]$ ayant la même aire que le domaine $\mathcal{D}$.

7. D'après la question 3, l'intégrale sur $[0\,;2\pi]$ est nulle :

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \times 0 = \boxed{0}$$

C'était prévisible sans calcul : sur une période complète, le sinus prend autant de valeurs positives que de valeurs opposées, et sa moyenne est donc nulle.

EXERCICE 29 ⋆⋆

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et la seconde solution s'obtient par symétrie : $2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$.

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}\right\}}$$

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$, donc les solutions de $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$ se situent dans le troisième et le quatrième quadrant :

$$\boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}\right\}}$$

c) Le cosinus est négatif lorsque le point du cercle est à gauche de l'axe vertical :

$$\boxed{S = \left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]}$$

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et le sinus dépasse strictement cette valeur entre $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$:

$$\boxed{S = \left]\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right[}$$

e) $2\sin(x) - 1 = 0 \iff \sin(x) = \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}}$$

f) On pose $X = 2x$. Lorsque x décrit $[0\,;2\pi]$, le réel X décrit $[0\,;4\pi]$: il faut donc chercher les solutions sur *deux* tours.

$$\cos(X) = \frac{1}{2} \iff X \in \left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{3}\,;\frac{7\pi}{3}\,;\frac{11\pi}{3}\right\}$$

En divisant par 2 :

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}\right\}}$$

$$\boxed{\text{L'erreur classique consiste à oublier les deux dernières solutions}}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Partie A : la démonstration.

1. $$\boxed{g'(x) = 1 - \cos(x)}$$

   Pour tout réel x, $\cos(x) \leqslant 1$, donc :

   $$\boxed{g'(x) \geqslant 0 \text{ sur } [0\,;+\infty[}$$

   La dérivée s'annule lorsque $\cos(x) = 1$, c'est-à-dire aux points $x = 2k\pi$: ce sont des points isolés, qui n'interrompent pas la croissance.

2.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0	↗

$$g(0) = 0 - \sin(0) = \boxed{0}$$

3. La fonction g étant croissante sur $[0\,;+\infty[$ et valant 0 en 0, elle reste positive :

   $$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) \geqslant g(0) = 0$$

   $$x - \sin(x) \geqslant 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\sin(x) \leqslant x}$$

4. $$\boxed{\text{Sur } [0\,;+\infty[,\ \text{la courbe du sinus est située en dessous de la droite } y = x}$$

   Les deux courbes se touchent uniquement en l'origine, ce qui correspond au cas $g(x) = 0$.

5. Le sinus étant impair, pour $x \leqslant 0$ on pose $x = -u$ avec $u \geqslant 0$:

   $$\sin(u) \leqslant u \implies -\sin(u) \geqslant -u \implies \sin(-u) \geqslant -u$$

   $$\boxed{\text{Sur }]-\infty\,;0],\ \text{on a } \sin(x) \geqslant x :\ \text{la courbe est au-dessus de la droite}}$$

Partie B : qualité de l'approximation.

6.

x	0,1	0,5	1
$\sin(x)$	0,099833	0,479426	0,841471
$x - \sin(x)$	0,000167	0,020574	0,158529

7. L'écart croît très vite : il est de l'ordre de 2×10^{-4} pour $x = 0{,}1$, mais déjà de 0,16 pour $x = 1$, soit près de 16 % de la valeur.

   $$\boxed{\text{L'approximation est acceptable pour } |x| \text{ inférieur à environ 0,2 ou 0,3}}$$

   On peut le formuler en pourcentage : pour $x = 0{,}1$, l'erreur relative vaut environ 0,17 % ; pour $x = 0{,}5$, elle atteint déjà 4 %.

8. Parce que la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$, sur laquelle tout repose, n'est vraie qu'en **radians**. En degrés, le taux de variation du sinus en 0 vaut $\dfrac{\pi}{180}\approx 0{,}0175$, et non 1.

$$\boxed{\text{En degrés, l'approximation correcte serait } \sin(x)\approx\frac{\pi}{180}\,x}$$

C'est précisément ce qui justifie l'emploi du radian en analyse : c'est la seule unité pour laquelle les formules de dérivation prennent leur forme simple.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

1. C'est une formule des angles associés, vue en Première : les réels x et $\dfrac{\pi}{2}-x$ correspondent à deux points du cercle symétriques par rapport à la première bissectrice, ce qui échange abscisse et ordonnée.

$$\boxed{\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

2. On dérive les deux membres. À droite, on applique $\big(\sin(u)\big)'=u'\cos(u)$ avec $u(x)=\dfrac{\pi}{2}-x$, donc $u'(x)=-1$:

$$\cos'(x)=(-1)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\boxed{-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

3. Par la même formule des angles associés appliquée cette fois au cosinus :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$$

$$\boxed{\cos'(x)=-\sin(x)}$$

4. En 0, le cosinus atteint son maximum : la tangente y est horizontale, donc $\cos'(0)=0$. La formule donne bien $-\sin(0)=0$.

   En $\dfrac{\pi}{2}$, la courbe du cosinus descend le plus rapidement : la tangente y a la pente la plus négative possible, à savoir -1. La formule donne $-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

$$\boxed{\text{Les deux vérifications sont cohérentes}}$$

5. On part cette fois de $\sin(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, puis on dérive avec $\big(\cos(u)\big)'=-u'\sin(u)$ et $u'=-1$:

$$\sin'(x)=-(-1)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\boxed{\cos(x)}$$

   Les deux formules se déduisent donc l'une de l'autre : il suffit d'en admettre une seule.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. $$f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = (-\sin(x)) \times \cos(x) = -f(x)$$
$$\boxed{f \text{ est impaire}}$$

2. On dérive le produit :
$$f'(x) = \cos(x) \times \cos(x) + \sin(x) \times (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
Or l'identité rappelée donne exactement :
$$\boxed{f'(x) = \cos(2x)}$$

3. $$f(x+\pi) = \sin(x+\pi)\cos(x+\pi) = (-\sin(x)) \times (-\cos(x)) = \sin(x)\cos(x) = f(x)$$
$$\boxed{f \text{ est périodique de période } \pi}$$

4. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, le réel $2x$ décrit $[0\,;\pi]$: le cosinus y est positif jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, puis négatif. Donc $f'(x) \geqslant 0$ pour $2x \leqslant \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

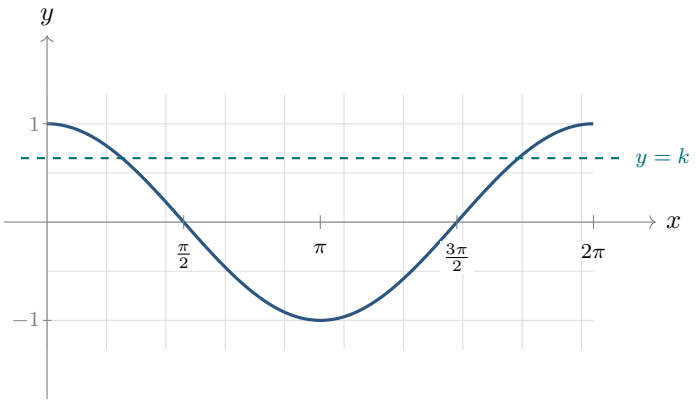
En effet $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

5. La fonction étant π-périodique, ce maximum local est le maximum sur $\mathbb{R}$ tout entier, et il se reproduit à chaque période :
$$\boxed{\text{Le maximum de } f \text{ vaut } \frac{1}{2}, \text{ atteint en } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

6. L'identité $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ donne immédiatement :
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)}$$
Sous cette forme, tout devient évident : le sinus étant compris entre -1 et 1, la fonction f oscille entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, et le maximum est atteint lorsque $\sin(2x) = 1$, c'est-à-dire $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. On retrouve bien le résultat de la question 5, sans aucune étude de dérivée.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

1.



2. On fait glisser la droite horizontale d'ordonnée k et l'on compte les intersections.

si $k < -1$ ou $k > 1$	: aucune solution
si $k = 1$	: 2 solutions ($x = 0$ et $x = 2\pi$)
si $-1 < k < 1$	: 2 solutions
si $k = -1$	: 1 solution ($x = \pi$)

Le cas $k = 1$ est particulier : les deux solutions sont les *bornes* de l'intervalle, qui correspondent au même point du cercle trigonométrique.

3. $$\boxed{k = 1 : S = \{0\,;2\pi\} \quad ; \quad k = 0 : S = \left\{\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right\} \quad ; \quad k = -1 : S = \{\pi\}}$$

4. Sur $\mathbb{R}$, la périodicité reproduit indéfiniment chaque solution :

si $\lvert k\rvert > 1$	: aucune solution
si $\lvert k\rvert \leqslant 1$	: une infinité de solutions

5. On pose $X = 2x$: lorsque x décrit $[0\,;2\pi]$, le réel X décrit $[0\,;4\pi]$, soit *deux* périodes. Chaque solution en X fournit une solution en x, et le nombre de solutions double.

si $\lvert k\rvert > 1$	: aucune solution
si $-1 < k < 1$	: 4 solutions
si $k = 1$	: 3 solutions $(x = 0,\ \pi,\ 2\pi)$
si $k = -1$	: 2 solutions $\left(x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Partie A : premières propriétés.

1. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. En multipliant par 2, qui est positif, puis en ajoutant 3 :

$$-2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2 \qquad \text{puis} \qquad \boxed{1 \leqslant 3 + 2\sin(x) \leqslant 5}$$

Le dénominateur est donc toujours supérieur ou égal à 1 : il ne s'annule jamais.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$$

2. Le numérateur et le dénominateur sont tous deux 2π-périodiques :

$$f(x+2\pi) = \frac{-\cos(2x+4\pi)}{3+2\sin(x+2\pi)} = \frac{-\cos(2x)}{3+2\sin(x)} = f(x)$$

$$\boxed{f \text{ est périodique de période } 2\pi}$$

3. $$f(-x) = \frac{-\cos(-2x)}{3+2\sin(-x)} = \frac{-\cos(2x)}{3-2\sin(x)}$$

Le dénominateur a changé : ce n'est ni $f(x)$ ni $-f(x)$. On le confirme par un contre-exemple :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos(\pi)}{3+2} = \frac{1}{5} \qquad \text{et} \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos(-\pi)}{3-2} = 1$$

$$\boxed{f \text{ n'est ni paire ni impaire}}$$

4. On utilise $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $\cos(2\pi - 2x) = \cos(2x)$:

$$f(\pi-x) = \frac{-\cos\left(2(\pi-x)\right)}{3+2\sin(\pi-x)} = \frac{-\cos(2\pi-2x)}{3+2\sin(x)} = \frac{-\cos(2x)}{3+2\sin(x)} = f(x)$$

$$\boxed{f(\pi-x) = f(x)}$$

$$\boxed{\text{La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation } x = \frac{\pi}{2}}$$

5. Connaître f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ suffit : la symétrie de la question 4 donne alors f sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, puisque $\pi - x$ décrit le premier intervalle lorsque x décrit le second.

$$\boxed{\text{Il suffit d'étudier } f \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]}$$

On obtient ainsi f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, intervalle de longueur 2π, puis toute la courbe par **translations de vecteur** $2\pi\,\vec{\imath}$.

Partie B : réduction à une fonction rationnelle.

6. L'identité $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donne $-\cos(2x) = 2\sin^2(x) - 1$:

$$\boxed{f(x) = \frac{2\sin^2(x)-1}{3+2\sin(x)}}$$

7. Sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, la dérivée du sinus est $\cos(x)$, qui y est positive et ne s'annule qu'aux deux bornes.

$$\boxed{t = \sin(x) \text{ croît strictement de } -1 \text{ à } 1}$$

Chaque valeur de t de $[-1\,;1]$ correspond donc à un unique x de l'intervalle d'étude : on peut remplacer l'étude de f par celle de g.

8. On dérive le quotient, avec $u = 2t^2 - 1$ et $v = 2t + 3$:

$$g'(t) = \frac{4t(2t+3) - 2\left(2t^2-1\right)}{(2t+3)^2} = \frac{8t^2+12t-4t^2+2}{(2t+3)^2}$$

$$= \frac{4t^2+12t+2}{(2t+3)^2} = \boxed{\frac{2\left(2t^2+6t+1\right)}{(2t+3)^2}}$$

9. Le discriminant vaut $\Delta = 36 - 8 = 28$, d'où $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$ et les deux racines :

$$t = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \approx -2{,}82 \qquad ; \qquad t = \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \approx -0{,}18$$

La première n'appartient pas à $[-1\,;1]$, la seconde si :

$$\boxed{t_0 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \approx -0{,}177}$$

10. Le dénominateur $(2t+3)^2$ est un carré, strictement positif car $2t + 3 \geqslant 1$. Le signe de $g'(t)$ est donc celui du trinôme $2t^2 + 6t + 1$, dont le coefficient dominant est positif : il est négatif entre les racines, positif à l'extérieur. Sur $[-1\,;1]$, seule t_0 intervient.

$$\boxed{g'(t) < 0 \text{ sur } [-1\,;t_0[\quad \text{et} \quad g'(t) > 0 \text{ sur }]t_0\,;1]}$$

11.

$$g(-1) = \frac{2-1}{-2+3} = \boxed{1} \qquad ; \qquad g(1) = \frac{2-1}{2+3} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

12. Comme t_0 est racine de $2t^2 + 6t + 1$, on a $2t_0^2 + 6t_0 + 1 = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{2t_0^2 = -6t_0 - 1}$$

On remplace alors dans le numérateur de $g(t_0)$:

$$g(t_0) = \frac{2t_0^2 - 1}{2t_0 + 3} = \frac{-6t_0 - 1 - 1}{2t_0 + 3} = \frac{-6t_0 - 2}{2t_0 + 3}$$

Or $2t_0 = -3 + \sqrt{7}$, donc $2t_0 + 3 = \sqrt{7}$ et $-6t_0 - 2 = -3\left(-3 + \sqrt{7}\right) - 2 = 7 - 3\sqrt{7}$:

$$g(t_0) = \frac{7 - 3\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} - 3 = \sqrt{7} - 3$$

$$\boxed{g(t_0) = \sqrt{7} - 3 \approx -0{,}354}$$

13.

t	-1		t_0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	↘	$\sqrt{7}-3$	↗	$\frac{1}{5}$

Partie C : retour à f et tracé.

14. Comme $t = \sin(x)$ croît strictement sur l'intervalle d'étude, f varie exactement comme g : il suffit de traduire t_0 en $x_0 = \arcsin(t_0)$, obtenu à la calculatrice.

$$\boxed{x_0 \approx -0{,}18}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\sqrt{7}-3$	↗	$\frac{1}{5}$

15. Le dénominateur ne s'annulant jamais, le quotient est nul si et seulement si son numérateur l'est :

$$f(x)=0 \iff \cos(2x)=0 \iff 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \iff x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

En ne gardant que les valeurs de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

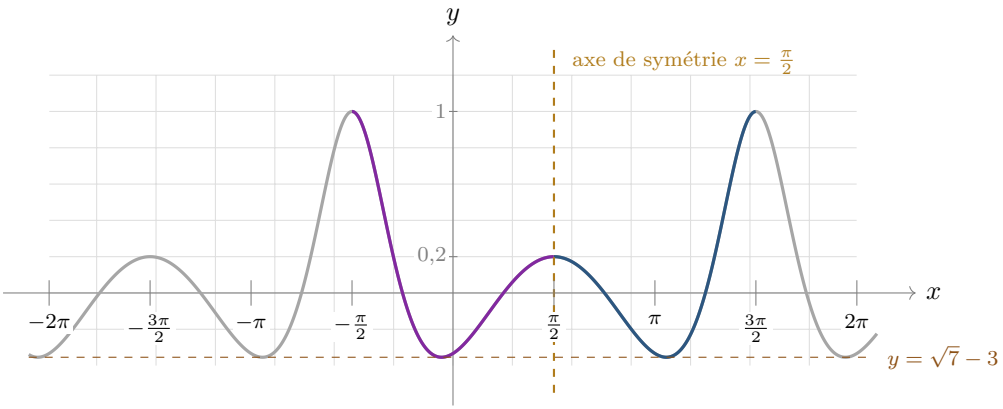
$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right\}}$$

16.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\cos(-\pi)}{3-2}=\boxed{1} \qquad ; \qquad f(0)=\frac{-\cos(0)}{3+0}=\boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\cos(\pi)}{3+2}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

17. Voici la courbe. En violet la portion réellement étudiée, en bleu ardoise son image par la symétrie d'axe $x=\frac{\pi}{2}$, et en gris tout le reste, obtenu par translations.



On vérifie sur la figure les trois points remarquables : le maximum 1 atteint en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$, le minimum $\sqrt{7}-3$ atteint deux fois par période, et les zéros aux abscisses $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

Pour aller plus loin

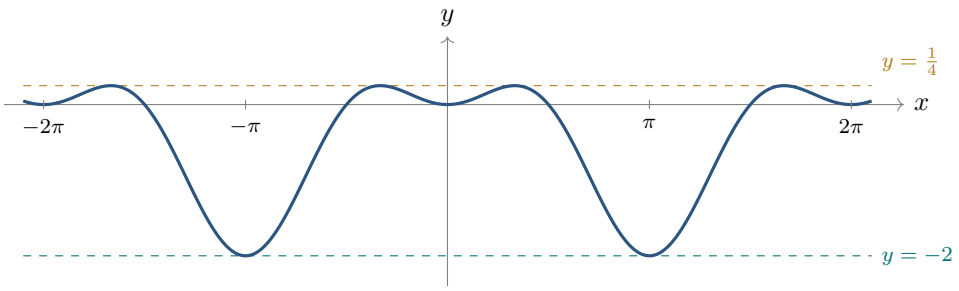
EXERCICE 35 ⋆⋆

Posons $t=\cos(x)$. Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, le réel t décrit exactement l'intervalle $[-1\,;1]$, et l'expression devient $g(t)=t-t^2$. Il s'agit donc de trouver le maximum et le minimum du trinôme g sur $[-1\,;1]$. Sous forme canonique :

$$g(t)=\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$$

Le maximum de g vaut $\frac{1}{4}$, atteint en $t = \frac{1}{2} \in [-1\,;1]$. Sur $[-1\,;1]$, la quantité $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ est la plus grande pour le point le plus éloigné de $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $t = -1$: le minimum vaut $g(-1) = -2$.

$$\max_{\mathbb{R}} \left(\cos - \cos^2\right) = \frac{1}{4} \quad \text{en } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{et} \qquad \min_{\mathbb{R}} \left(\cos - \cos^2\right) = -2 \quad \text{en } x = \pi + 2k\pi$$



Sur cette courbe, on lit que la fonction oscille entre -2, atteint lorsque $\cos(x) = -1$, et $\frac{1}{4}$, atteint deux fois par période lorsque $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Remarque. L'erreur la plus répandue est d'oublier que t ne parcourt que $[-1\,;1]$: sur $\mathbb{R}$ tout entier, le trinôme $t - t^2$ n'a pas de minimum, et c'est la borne $t = -1$ qui le fournit ici. Le changement de variable $t = \cos(x)$ est la même idée qu'à la partie B de l'exercice 34.

EXERCICE 36 ⋆⋆

L'équation s'écrit $y' = -3y + \sin(x)$. Comme au chapitre 8 (exercices 28 et 31), si φ est une solution particulière, les solutions sont les fonctions $\varphi + K\mathrm{e}^{-3x}$, $K \in \mathbb{R}$.

Cherchons $\varphi(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$. Alors $\varphi'(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$ et

$$\varphi'(x) + 3\varphi(x) = (3a - b)\sin(x) + (a + 3b)\cos(x)$$

Si cette quantité vaut $\sin(x)$ pour tout réel x, on obtient en $x = \frac{\pi}{2}$ l'égalité $3a - b = 1$, et en $x = 0$ l'égalité $a + 3b = 0$. Ce système donne $a = \frac{3}{10}$ et $b = -\frac{1}{10}$. Réciproquement, ces valeurs conviennent pour tout x.

$$f(x) = \frac{3\sin(x) - \cos(x)}{10} + K\mathrm{e}^{-3x}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Vérification : pour $K = 0$, $f'(x) + 3f(x) = \frac{3\cos(x)+\sin(x)}{10} + \frac{9\sin(x)-3\cos(x)}{10} = \sin(x)$.

Interprétation. Quand $x \to +\infty$, le terme $K\mathrm{e}^{-3x}$ tend vers 0 : toutes les solutions finissent par se confondre avec la solution périodique φ. En physique, on parle de *régime transitoire* pour $K\mathrm{e}^{-3x}$ et de *régime permanent* pour φ ; c'est ce qu'on observe par exemple dans un circuit électrique soumis à une tension sinusoïdale.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. Comme $\frac{T}{T'}$ est un rationnel strictement positif, on peut écrire $\frac{T}{T'} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers strictement positifs, d'où $qT = pT'$. Posons $S = qT = pT' > 0$. En appliquant q fois la T-périodicité de f (récurrence immédiate), on obtient $f(x + S) = f(x + qT) = f(x)$; de même, $g(x + S) = g(x + pT') = g(x)$.

$$f + g \text{ est périodique, de période } S = qT = pT'.$$

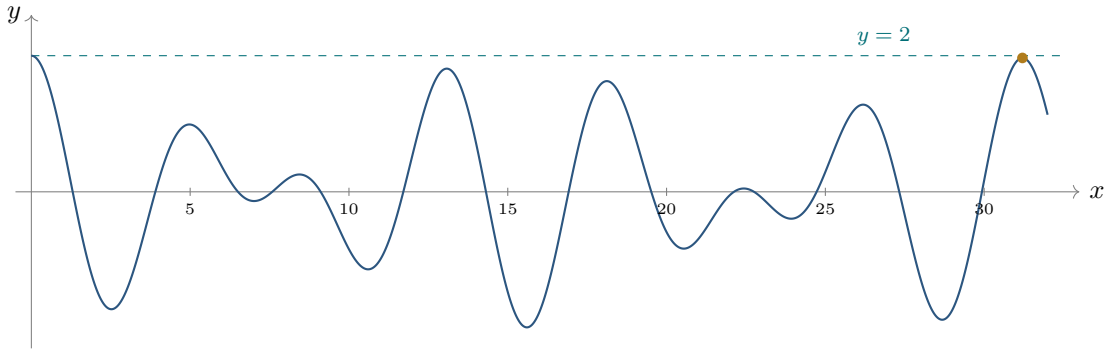
Exemple : $x \mapsto \cos(2x) + \sin(3x)$ est somme de fonctions de périodes π et $\frac{2\pi}{3}$, de rapport $\frac{3}{2}$; elle est 2π-périodique.

2. (a) Comme $\cos(x) \leqslant 1$ et $\cos(\alpha x) \leqslant 1$, on a $f(x) = 2$ si et seulement si $\cos(x) = 1$ et $\cos(\alpha x) = 1$, c'est-à-dire s'il existe deux entiers k et m tels que $x = 2k\pi$ et $\alpha x = 2m\pi$. Si $x \neq 0$, alors $k \neq 0$ et $\alpha = \frac{\alpha x}{x} = \frac{2m\pi}{2k\pi} = \frac{m}{k}$ serait rationnel, ce qui est exclu. Donc $x = 0$, et l'on vérifie que $f(0) = 2$.

$$\boxed{f(x) = 2 \iff x = 0}$$

(b) Supposons f périodique, de période $T > 0$. Alors $f(T) = f(0+T) = f(0) = 2$, donc $T = 0$ d'après la question précédente : c'est absurde.

$$\boxed{f \text{ n'est pas périodique.}}$$



Pour $\alpha = \sqrt{2}$, cette courbe ressemble à une courbe périodique, et s'approche par moments de la valeur 2 (en ocre, $f \approx 1{,}967$ pour $x \approx 31{,}2$), mais elle n'atteint cette valeur qu'en 0 et ne se répète jamais exactement.

Remarque. La somme de deux fonctions périodiques n'est donc pas toujours périodique : l'hypothèse sur le rapport des périodes est essentielle. Une fonction comme $\cos(x) + \cos(\sqrt{2}\,x)$ est dite *presque périodique* ; elle s'approche de 2 d'aussi près qu'on veut (on trouve $f \approx 1{,}999$ vers $x \approx 182{,}2$) sans jamais l'atteindre.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

1. Notons $c = \cos(x)$. Avec $\cos(2x) = 2c^2 - 1$:

$$2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 = 4c^2 - 2 + 4c + 3 = 4c^2 + 4c + 1 = (2c+1)^2 \geqslant 0$$

Il y a égalité si et seulement si $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 \geqslant 0, \text{ avec égalité si et seulement si } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

2. Notons $c = \cos^2(x)$ et $s = \sin^2(x)$, de sorte que $c + s = 1$. D'après l'identité $(c+s)^3 = c^3 + s^3 + 3cs(c+s)$:

$$\cos^6(x) + \sin^6(x) = c^3 + s^3 = 1 - 3cs = 1 - 3\big(\sin(x)\cos(x)\big)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$$

Enfin, $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ appliquée à $a = 2x$ donne $\sin^2(2x) = \frac{1-\cos(4x)}{2}$, d'où

$$\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos(4x)) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos(4x)$$

et $f_\lambda(x) = \frac{5}{8} + \left(\frac{3}{8} - \lambda\right)\cos(4x)$. Si $\lambda = \frac{3}{8}$, la fonction est constante, égale à $\frac{5}{8}$. Sinon, elle prend des valeurs différentes en $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$, où $\cos(4x)$ vaut 1 et -1.

$$\boxed{f_\lambda \text{ est constante si et seulement si } \lambda = \frac{3}{8} \text{ ; elle vaut alors } \frac{5}{8}.}$$

Vérification : en $x = 0$, $1 + 0 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$; en $x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Remarque. Dans les deux questions, la clé est d'écrire l'expression à l'aide d'une seule quantité ($\cos(x)$ dans la première, $\cos(4x)$ dans la seconde). On peut aussi traiter la question 2 en dérivant, puisque f_λ est constante si et seulement si sa dérivée est nulle, mais le calcul est nettement plus long.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

1. Avec $\cos^2(\alpha) = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{8} - 1 = \boxed{-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

   Puis, avec $\cos^2(2\alpha) = \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$:

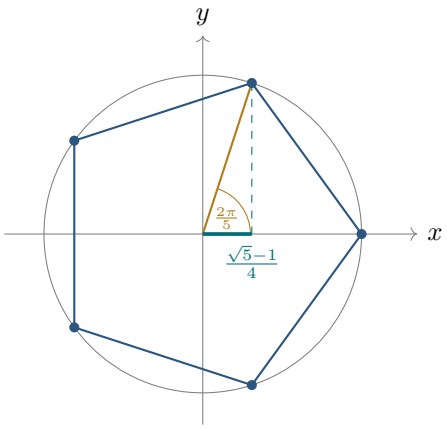
$$\cos(4\alpha) = 2\cos^2(2\alpha) - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(\alpha)}$$

2. D'après le cours, les réels X tels que $\cos(X) = \cos(\alpha)$ sont les réels $X = \alpha + 2k\pi$ et $X = -\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Appliqué à $X = 4\alpha$:

$$\boxed{4\alpha = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4\alpha = -\alpha + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

3. *Premier cas :* $3\alpha = 2k\pi$, donc $\alpha = \frac{2k\pi}{3}$. Comme $\alpha \in [0\,;\pi]$, $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, de cosinus 1 et $-\frac{1}{2}$; or $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$. Ce cas est impossible.
   Second cas : $5\alpha = 2k\pi$, donc $\alpha = \frac{2k\pi}{5}$, et $\alpha \in [0\,;\pi]$ laisse $\alpha \in \left\{0\,;\frac{2\pi}{5}\,;\frac{4\pi}{5}\right\}$. La valeur 0 est exclue comme ci-dessus, et $\frac{4\pi}{5} \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ a un cosinus négatif, alors que $\cos(\alpha) > 0$.

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi}{5} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$



Cette figure montre le pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique : le sommet d'angle $\frac{2\pi}{5}$ se projette sur l'axe des abscisses en $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$.

Remarque. Le nombre $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ s'écrit $\frac{1}{2\varphi}$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ne fait intervenir qu'une racine carrée, on peut construire le pentagone régulier à la règle et au compas, ce que savaient déjà les géomètres grecs.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆⋆

Fixons un réel x.

Étape 1 : une majoration. On a

$$\big(|\sin(x)| + |\cos(x)|\big)^2 = \sin^2(x) + \cos^2(x) + 2|\sin(x)\cos(x)| = 1 + |\sin(2x)| \leqslant 2$$

donc $|\sin(x)| + |\cos(x)| \leqslant \sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2} \approx 1{,}414 < \frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$, il vient

$$|\sin(x)| + \cos(x) \leqslant |\sin(x)| + |\cos(x)| < \frac{\pi}{2} \qquad \text{soit} \qquad |\sin(x)| < \frac{\pi}{2} - \cos(x)$$

Étape 2 : se ramener à deux cosinus. Par parité, $\cos\big(\sin(x)\big) = \cos\big(|\sin(x)|\big)$, et, d'après l'exercice 31, $\sin\big(\cos(x)\big) = \cos\big(\frac{\pi}{2} - \cos(x)\big)$.

Étape 3 : comparer. Les réels $|\sin(x)|$ et $\frac{\pi}{2} - \cos(x)$ appartiennent tous deux à $[0\,;\pi]$, puisque $0 \leqslant |\sin(x)| \leqslant 1$ et $\frac{\pi}{2} - 1 \leqslant \frac{\pi}{2} - \cos(x) \leqslant \frac{\pi}{2} + 1 < \pi$. Le cosinus étant strictement décroissant sur $[0\,;\pi]$, l'inégalité stricte de l'étape 1 donne

$$\cos\big(|\sin(x)|\big) > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos(x)\right)$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \quad \cos\big(\sin(x)\big) > \sin\big(\cos(x)\big)}$$

Remarque. Un calcul numérique montre que l'écart $\cos(\sin(x)) - \sin(\cos(x))$ ne descend jamais en dessous de 0,107 environ. Le piège de l'exercice est l'étape 3 : comparer $\cos(u)$ et $\cos(v)$ à partir de $u < v$ n'est légitime que si u et v sont dans un même intervalle où le cosinus est monotone, ce qu'il faut vérifier.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆⋆

Partie A. Pour $n \geqslant 1$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ ».

Initialisation : $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = u_1$.

Hérédité : si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors, avec $1 + \cos(2a) = 2\cos^2(a)$ et $a = \frac{\pi}{2^{n+2}}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

puisque $\frac{\pi}{2^{n+2}} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, où le cosinus est positif.

Conclusion : $\boxed{u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Partie B. Montrons par récurrence que $2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x) = \sin(x)$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, c'est la formule de duplication $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x)$. Si l'égalité est vraie au rang n, alors, comme $P_{n+1}(x) = P_n(x)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ et $2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$:

$$2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) P_{n+1}(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x) = \sin(x)$$

Enfin, $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$, sans quoi $\frac{x}{2^n}$, donc x, serait un multiple de π.

$$\boxed{P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}}$$

Partie C

1. Posons $h = \frac{x}{2^n}$, qui tend vers 0. Alors $2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x \times \frac{\sin(h)}{h}$ tend vers $x \times 1 = x$, d'après la proposition 3 du cours.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\sin(x)}{x}}$$

2. D'après la partie A, $\frac{u_k}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \cos\left(\frac{\pi/2}{2^k}\right)$, donc $\frac{v_n}{2^n} = \frac{u_1}{2} \times \cdots \times \frac{u_n}{2} = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$, et la question 1 donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2^n} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}}$$

Vérification numérique :

n	1	2	3	5	10
$\frac{v_n}{2^n}$	0,707 107	0,653 281	0,640 729	0,636 876	0,636 620

alors que $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}636\,620$: la convergence est très rapide.

Remarque. En écrivant le résultat sous la forme $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots$, on obtient la formule publiée par Viète en 1593, l'une des premières expressions de π comme limite d'un calcul infini.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆⋆

1. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ et $W_1 = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} = \boxed{1}$.

2. Posons $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$; alors $u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$. Comme $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $v(0) = 0$, le crochet est nul et

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ et la linéarité : $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$, soit $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

3. Comme $W_0 > 0$, $W_1 > 0$ et que W_{n+2} est le produit de W_n par un nombre strictement positif, une récurrence de deux en deux montre que $W_n > 0$ pour tout n. En appliquant la relation de proche en proche :

$$\boxed{W_{2k} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)} \times \frac{\pi}{2} \qquad W_{2k+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2k+1)}}$$

Avec les factorielles du chapitre 7, $2 \times 4 \times \cdots \times (2k) = 2^k k!$, et l'on obtient $W_{2k} = \binom{2k}{k}\frac{1}{4^k} \times \frac{\pi}{2}$: le coefficient binomial central de l'exercice 34 du chapitre 7 apparaît.

4. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, donc $\cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$. En intégrant : $\boxed{W_{n+1} \leqslant W_n}$.

5. La question 4 au rang $n+1$ donne $W_{n+2} \leqslant W_{n+1}$, c'est-à-dire, d'après la question 2 :

$$\boxed{\frac{n+1}{n+2} W_n \leqslant W_{n+1}}$$

6. En divisant par $W_n > 0$: $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. Le membre de gauche tend vers 1, et le théorème des gendarmes donne $\boxed{\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \longrightarrow 1}$.

7. D'après la question 3, en simplifiant les facteurs communs :

$$\frac{W_{2k+1}}{W_{2k}} = \frac{\big(2 \times 4 \times \cdots \times (2k)\big)^2}{\big(3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)\big)^2 \times (2k+1)} \times \frac{2}{\pi}$$

Ce quotient tend vers 1 d'après la question 6, donc

$$\boxed{\left(\frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1} \longrightarrow \frac{\pi}{2}}$$

Vérification numérique : cette quantité vaut environ 1,533 9 pour $k = 10$, 1,566 9 pour $k = 100$ et 1,570 4 pour $k = 1\,000$, alors que $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}570\,8$.

Remarque. Ce résultat, obtenu par Wallis au milieu du XVII$^{\text{e}}$ siècle, exprime π à l'aide de seuls nombres entiers. La convergence est lente, à l'opposé de la formule de Viète de l'exercice 41. Combinée à la question 3, elle donne une estimation précise du coefficient binomial central, $\binom{2k}{k} \approx \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$, bien plus fine que l'encadrement de l'exercice 34 du chapitre 7.