EXERCICES – CHAPITRE 9

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Périodicité, parité et valeurs remarquables

EXERCICE 1 ⋆

Donner la valeur exacte de chacun des nombres suivants, en s'aidant du cercle trigonométrique.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ c) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ g) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ f) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ h) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

EXERCICE 2 ⋆

En utilisant la périodicité, ramener chacun des réels suivants à un réel de $]-\pi\,;\pi]$, puis donner la valeur exacte demandée.

a) $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ c) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

b) $\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ d) $\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right)$

Démontrer ensuite que pour tout entier relatif k et tout réel x :

$$\cos\left(x+2k\pi\right)+\sin\left(x+2k\pi\right)=\cos(x)+\sin(x)$$

EXERCICE 3 ⋆

Déterminer si chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre. Justifier par le calcul de $f(-x)$.

a) $f(x)=\cos(3x)$

b) $f(x)=\sin(x)+x$

c) $f(x)=x^2\cos(x)$

d) $f(x)=\sin(x)\cos(x)$

e) $f(x)=\cos(x)+\sin(x)$

f) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$

Pour f), on justifiera d'abord que le dénominateur ne s'annule jamais.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(3x)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.
2. Démontrer de même que $g:x\mapsto\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est périodique de période 4π.
3. Soit a un réel strictement positif. Conjecturer la période de $x\mapsto\sin(ax)$, puis le démontrer.
4. La fonction $h:x\mapsto x+\sin(x)$ est-elle périodique ? Justifier.

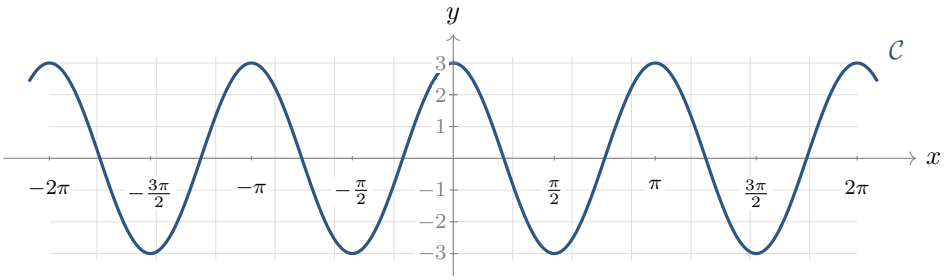
EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Soit x un réel tel que $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$ et $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Déterminer la valeur exacte de $\sin(x)$.
2. Soit x un réel tel que $\sin(x) = -\dfrac{2}{3}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$. Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.
3. Simplifier, pour tout réel x, l'expression $A(x) = \cos^4(x) - \sin^4(x) + 2\sin^2(x)$.
   On pourra reconnaître une différence de deux carrés.
4. Démontrer que pour tout réel x, $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$.

Lecture graphique

EXERCICE 6 ⋆

Ci-dessous est tracée la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dont l'expression est de la forme $f(x) = a\cos(bx)$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

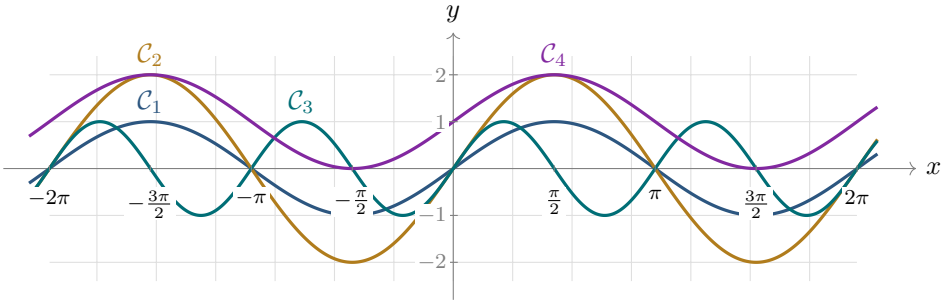


1. Lire graphiquement la période de f. En déduire la valeur de b.
2. Lire le maximum et le minimum de f. En déduire la valeur de a.
3. Donner l'expression de $f(x)$.
4. En quelles valeurs de x de $[0\,;2\pi]$ la fonction atteint-elle son maximum ? Et son minimum ?
5. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions sur $[0\,;2\pi]$? Les déterminer par le calcul.
6. La fonction f est-elle paire ou impaire ? Justifier à la fois graphiquement et par le calcul.

EXERCICE 7 ⋆

Sur le graphique ci-dessous sont tracées quatre courbes, représentant dans le désordre les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \sin(x) \quad ; \quad x \mapsto 2\sin(x) \quad ; \quad x \mapsto \sin(2x) \quad ; \quad x \mapsto \sin(x) + 1$$

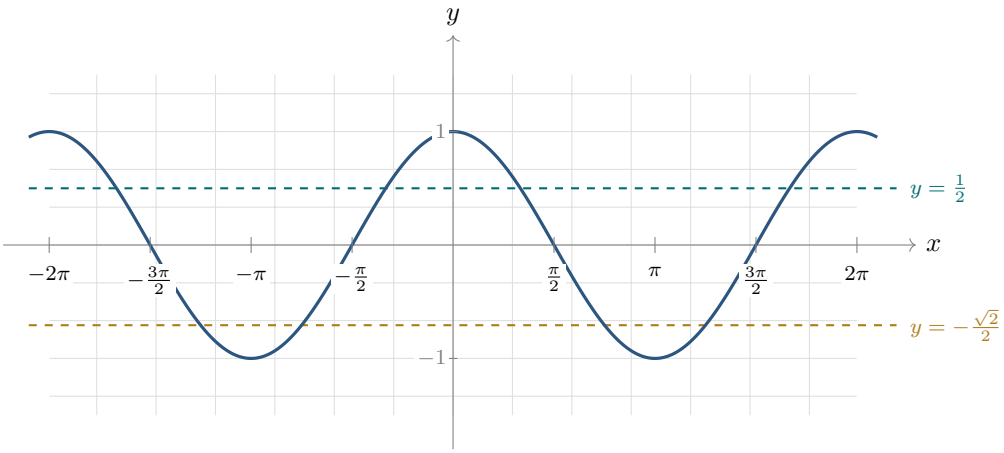


1. Associer chaque courbe à son expression. On justifiera chaque réponse par au moins deux arguments choisis parmi la période, le maximum, le minimum et la valeur en 0.

2. Parmi ces quatre fonctions, lesquelles sont impaires ? Le vérifier par le calcul.
3. Laquelle n'est ni paire ni impaire ? Quelle transformation géométrique fait passer de sa courbe à celle du sinus ?

EXERCICE 8 ⋆⋆

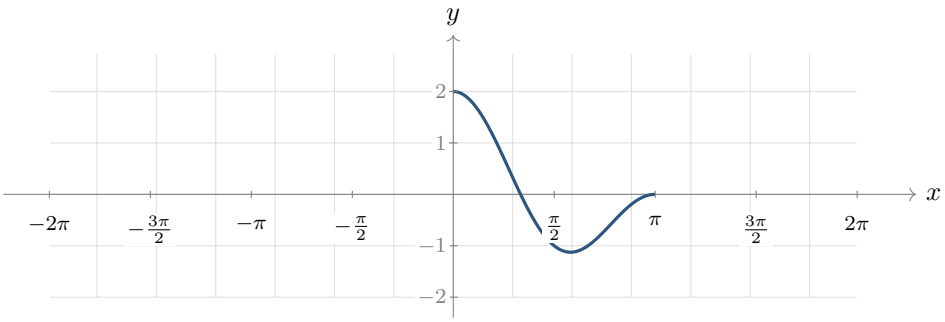
Ci-dessous est tracée la courbe de la fonction cosinus sur $[-2\pi\,;2\pi]$, ainsi que les droites d'équations $y=\dfrac{1}{2}$ et $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



1. Résoudre graphiquement, sur $[-2\pi\,;2\pi]$, l'équation $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$, puis donner les valeurs exactes.
2. Résoudre graphiquement, sur le même intervalle, l'équation $\cos(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis donner les valeurs exactes.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $\cos(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $\cos(x)<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$.
5. Combien l'équation $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$? Les décrire toutes.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **paire** et **périodique de période** 2π. Sa courbe n'est représentée ci-dessous que sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.



1. Que vaut $f(0)$? Que vaut $f(\pi)$?
2. En utilisant la parité, reproduire la figure et compléter la courbe sur $[-\pi\,;0]$.
3. En utilisant la périodicité, compléter alors la courbe sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

4. Déterminer $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, puis $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$, en justifiant par les propriétés utilisées.

5. Combien de fois la fonction atteint-elle son minimum sur $[-2\pi\,;2\pi]$?

Dérivation et primitives

EXERCICE 10 ⋆

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 3\sin(x)$

b) $f(x) = \cos(x) - 2x$

c) $f(x) = 5\cos(x) + \sin(x)$

d) $f(x) = x^2 - 4\cos(x)$

e) $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$

f) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2}$

EXERCICE 11 ⋆

Même consigne, en utilisant la proposition 4 du cours.

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $f(x) = \cos(2x - 1)$

c) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = \cos\left(x^2\right)$

e) $f(x) = \sin\left(x^3 + x\right)$

f) $f(x) = \cos(-4x + \pi)$

EXERCICE 12 ⋆⋆

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant la formule utilisée (produit, quotient ou composée).

a) $f(x) = x\cos(x)$

b) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

c) $f(x) = \sin^2(x)$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos(x)}$

f) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$

EXERCICE 13 ⋆⋆

Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = \sin(x)$ et $a = 0$

b) $f(x) = \cos(x)$ et $a = 0$

c) $f(x) = \sin(x)$ et $a = \dfrac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \cos(2x)$ et $a = \dfrac{\pi}{4}$

e) $f(x) = x\sin(x)$ et $a = \pi$

Que remarque-t-on pour les questions b) et c) ? Interpréter graphiquement.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Déterminer les limites suivantes, en se ramenant à la proposition 3 du cours.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{x}$

Pour a) et c), on pourra faire apparaître artificiellement le quotient $\dfrac{\sin(u)}{u}$ en multipliant et divisant par la quantité adéquate.

EXERCICE 15 ⋆

Le cours donne $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$: en lisant ces formules à l'envers, on obtient des primitives. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \cos(x)$

b) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$

d) $f(x) = \cos(2x)$

e) $f(x) = \sin(3x - 1)$

f) $f(x) = \cos(x) + x$

g) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

h) $f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}$

On vérifiera chaque réponse en la dérivant. Pour g), on pourra reconnaître une expression de la forme $u'u$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Calculer les intégrales suivantes. On donnera des valeurs exactes.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x))\,\mathrm{d}x$

Le résultat de la question e) peut surprendre : l'expliquer à l'aide de l'imparité du sinus.

Étude et représentation graphique

EXERCICE 17 ⋆

1. Déterminer le signe de $\cos(x)$ sur $[0\,;2\pi]$, puis dresser le tableau de signes correspondant.
2. Faire de même pour $\sin(x)$ sur $[0\,;2\pi]$.
3. En déduire le signe de $\sin(x)\cos(x)$ sur $[0\,;2\pi]$.
4. Résoudre sur $[0\,;2\pi]$ l'inéquation $\sin(x)\cos(x) \geqslant 0$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par $f(x) = 3\sin(x)$.
   (a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;2\pi]$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
   (c) Tracer la courbe de f sur $[0\,;2\pi]$, en prenant 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour une unité en ordonnée.
2. Reprendre les trois questions pour la fonction g définie sur $[0\,;2\pi]$ par $g(x) = 1 - 2\cos(x)$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x)$.

1. Démontrer que f est périodique de période π.
2. Démontrer que f est paire.
3. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, en précisant les transformations qui permettront ensuite d'obtenir toute la courbe.
4. Calculer $f'(x)$, étudier son signe sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
5. Tracer la courbe de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis la compléter par symétrie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis par translations sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

On considère les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x) \quad ; \quad g(x) = 3\sin(x) \quad ; \quad h(x) = \sin(3x) \quad ; \quad k(x) = \sin(x) - 2$$

1. Pour chacune, déterminer le maximum, le minimum et la période.
2. Tracer les quatre courbes dans un même repère, sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
3. Décrire la transformation géométrique qui permet de passer de la courbe de f à celle de g, puis à celle de k.
4. Soient a et b deux réels strictement positifs. Donner, en fonction de a et b, le maximum, le minimum et la période de $x \mapsto a\sin(bx)$.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(x) + \cos(2x)$.

1. Démontrer que f est paire et périodique de période 2π. En déduire l'intervalle d'étude que l'on peut choisir.
2. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -2\sin(x)(1 + 2\cos(x))$.
   On pourra utiliser l'identité $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\pi]$, en dressant un tableau de signes à deux facteurs.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$, en donnant les valeurs exactes de $f(0)$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $f(\pi)$.
5. Tracer la courbe de f sur $[0\,;\pi]$, puis la compléter sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est **impaire** et **périodique de période** 2π. Son tableau de variations sur $[0\,;\pi]$ est le suivant.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

1. Que valent $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$?
2. Déterminer $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$, en précisant la propriété utilisée à chaque fois.
3. Tracer l'allure de la courbe de f sur $[0\,;\pi]$, puis la compléter sur $[-2\pi\,;2\pi]$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[-\pi\,;\pi]$.
5. Combien l'équation $f(x)=1$ admet-elle de solutions sur $[-2\pi\,;2\pi]$?

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1. La dérivée de la fonction cosinus est :	$\sin$	$-\sin$	$\cos$
2. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ vaut :	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. La dérivée de $x\mapsto\sin(3x)$ est :	$\cos(3x)$	$3\cos(3x)$	$-3\cos(3x)$
4. La période de $x\mapsto\cos(4x)$ est :	4π	2π	$\dfrac{\pi}{2}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ vaut :	0	1	n'existe pas
6. La fonction sinus est :	paire	impaire	ni l'une ni l'autre
7. Pour tout réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)$ vaut :	1	2	$\cos(2x)$
8. La tangente à la courbe du sinus en 0 a pour équation :	$y=0$	$y=x$	$y=1$
9. Sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, la fonction cosinus est :	positive	négative	de signe variable
10. La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport :	à l'origine	à l'axe des ordonnées	à la droite $y=x$

EXERCICE 24 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. Pour tout réel x, $\cos(x)\leqslant1$.
2. Pour tout réel x, $\sin(2x)=2\sin(x)$.

3. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. Toute fonction périodique de période 2π est aussi périodique de période 4π.
5. La somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est toujours paire.
6. La dérivée d'une fonction 2π-périodique est 2π-périodique.
7. L'équation $\cos(x) = 2$ admet une infinité de solutions.
8. Pour tout réel x, $\sin(x) \leqslant x$.
9. La fonction $x \mapsto x\sin(x)$ est paire.
10. La courbe de la fonction sinus admet une tangente horizontale en $\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par $f(x) = x + \cos(x)$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Démontrer que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[0\,;2\pi]$, et préciser la seule valeur pour laquelle $f'(x) = 0$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;2\pi]$, puis dresser son tableau de variations en donnant les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(2\pi)$.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$. Que remarque-t-on ?
5. La fonction f est-elle périodique ? Justifier.
6. Démontrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution sur $[0\,;2\pi]$, puis en donner une valeur approchée au centième à l'aide de la calculatrice.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

Dans un port, la hauteur d'eau, exprimée en mètres, est modélisée par la fonction h définie sur $[0\,;24]$ par :

$$h(t) = 5 + 3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

où t désigne le temps écoulé, en heures, depuis minuit.

1. Calculer $h(0)$, $h(3)$ et $h(9)$. Interpréter chacun de ces résultats.
2. Démontrer que h est périodique de période 12. Interpréter dans le contexte.
3. Calculer $h'(t)$, puis étudier son signe sur $[0\,;12]$.
4. Dresser le tableau de variations de h sur $[0\,;12]$. À quelles heures observe-t-on la marée haute et la marée basse ?
5. Un navire ne peut entrer dans le port que si la hauteur d'eau atteint au moins 6,5 mètres. Résoudre l'inéquation $h(t) \geqslant 6{,}5$ sur $[0\,;12]$.
6. En déduire les créneaux horaires d'accès au port sur une journée complète.

EXERCICE 27 - TYPE BAC ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x)$.

1. Démontrer que f est paire.
2. Démontrer que f est périodique de période π.
   On pourra utiliser l'identité $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

3. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
4. Démontrer que $f'(x) = \sin(2x)$.
5. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
6. Tracer la courbe de f sur $[-\pi\,;\pi]$.
7. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Ce résultat était-il prévisible d'après les questions 2 et 5 ?

EXERCICE 28 - TYPE BAC ⋆⋆

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction sinus et $\mathcal{D}$ le domaine du plan compris entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

1. Justifier que $\sin(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[0\,;\pi]$.
2. En déduire que l'aire de $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire, vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$, puis la calculer.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$. Le résultat obtenu représente-t-il une aire ? Expliquer.
4. En déduire l'aire totale comprise entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses sur $[0\,;2\pi]$.
5. La *valeur moyenne* de f sur $[a\,;b]$ est le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur moyenne du sinus sur $[0\,;\pi]$, puis en donner une valeur approchée au millième.
6. Comparer cette valeur moyenne au maximum de la fonction sinus. Le résultat était-il prévisible ?
7. Sans calcul, donner la valeur moyenne du sinus sur $[0\,;2\pi]$. Justifier.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Résoudre sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ les équations et inéquations suivantes. On pourra s'aider du cercle trigonométrique ou d'une courbe.

a) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$

c) $\cos(x) \leqslant 0$

d) $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $2\sin(x) - 1 = 0$

f) $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$

Pour f), on posera $X = 2x$ et l'on prendra garde à l'intervalle dans lequel varie X.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

L'objectif est de démontrer l'inégalité $\sin(x) \leqslant x$ pour tout réel $x \geqslant 0$, puis d'en mesurer la qualité.

Partie A : la démonstration.

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - \sin(x)$.

1. Calculer $g'(x)$, puis déterminer son signe sur $[0\,;+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de g et calculer $g(0)$.
3. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$.
4. Interpréter graphiquement : quelle est la position de la courbe du sinus par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur $[0\,;+\infty[$?

5. Que peut-on dire sur $]-\infty\,;0]$? On utilisera l'imparité.

Partie B : qualité de l'approximation.

6. Calculer, à 10^{-6} près, l'écart $x-\sin(x)$ pour $x=0{,}1$, puis pour $x=0{,}5$, puis pour $x=1$.
7. Pour quelles valeurs de x l'approximation $\sin(x)\approx x$ vous paraît-elle acceptable ? Justifier votre réponse.
8. Un physicien remplace $\sin(x)$ par x pour étudier les petites oscillations d'un pendule. Pourquoi cette approximation serait-elle fausse si l'angle était exprimé en degrés ?

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Le cours démontre que $\sin'=\cos$. L'objectif est d'en déduire la dérivée du cosinus sans refaire tout le calcul.

1. Rappeler pourquoi, pour tout réel x, $\cos(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.
2. En dérivant cette égalité à l'aide de la proposition 4, démontrer que $\cos'(x)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.
3. En déduire que $\cos'(x)=-\sin(x)$.
4. Vérifier la cohérence de ce résultat en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$, à l'aide des tangentes lues sur la courbe du cosinus.
5. Reprendre le même raisonnement pour retrouver $\sin'=\cos$ à partir de $\cos'=-\sin$.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(x)\cos(x)$.

1. Démontrer que f est impaire.
2. Démontrer que $f'(x)=\cos(2x)$.
   On pourra utiliser l'identité $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$.
3. Démontrer que f est périodique de période π.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
5. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les valeurs de x en lesquelles il est atteint.
6. Démontrer que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x)$. Retrouver alors directement le résultat de la question 5.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

Soit k un réel. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $\cos(x)=k$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

1. Tracer la courbe de la fonction cosinus sur $[0\,;2\pi]$.
2. Déterminer graphiquement, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation. On distinguera tous les cas.
3. Vérifier la discussion précédente pour $k=1$, $k=0$ et $k=-1$, en donnant à chaque fois les solutions exactes.
4. Reprendre la question 2 pour l'équation $\cos(x)=k$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Reprendre enfin la question 2 pour l'équation $\cos(2x)=k$ sur $[0\,;2\pi]$.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-\cos(2x)}{3 + 2\sin(x)}$$

L'objectif de cet exercice est de tracer sa courbe représentative.

Partie A : premières propriétés.

1. Démontrer que pour tout réel x, $1 \leqslant 3 + 2\sin(x) \leqslant 5$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Démontrer que f est périodique de période 2π.
3. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
4. Démontrer que pour tout réel x, $f(\pi - x) = f(x)$. Interpréter graphiquement.
5. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, en précisant les transformations qui permettront ensuite d'obtenir toute la courbe.

Partie B : réduction à une fonction rationnelle.

6. Démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{2\sin^2(x) - 1}{3 + 2\sin(x)}$$

7. On pose $t = \sin(x)$ et l'on considère la fonction g définie sur $[-1\,;1]$ par $g(t) = \dfrac{2t^2 - 1}{2t + 3}$. Justifier que lorsque x décrit $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, le réel t décrit $[-1\,;1]$ de façon strictement croissante.
8. Démontrer que pour tout t de $[-1\,;1]$:

$$g'(t) = \frac{2\left(2t^2 + 6t + 1\right)}{(2t + 3)^2}$$

9. Démontrer que le trinôme $2t^2 + 6t + 1$ admet une unique racine t_0 dans $[-1\,;1]$, et que $t_0 = \dfrac{-3 + \sqrt{7}}{2}$.
10. En déduire le signe de $g'(t)$ sur $[-1\,;1]$.
11. Calculer $g(-1)$ et $g(1)$.
12. Démontrer que $2t_0^2 = -6t_0 - 1$, puis en déduire que $g\left(t_0\right) = \sqrt{7} - 3$.
    On remplacera $2t_0^2$ dans le numérateur de $g(t_0)$, puis on remarquera que $2t_0 + 3 = \sqrt{7}$.
13. Dresser le tableau de variations de g sur $[-1\,;1]$.

Partie C : retour à f et tracé.

14. En déduire le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On notera x_0 l'abscisse du minimum et l'on en donnera une valeur approchée au centième.
15. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
16. Donner les valeurs exactes de $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
17. Tracer la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis la compléter par symétrie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, et enfin par périodicité sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 35 ⋆⋆

Déterminer le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(x) - \cos^2(x)$.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, $f'(x) + 3f(x) = \sin(x)$. On cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto a\sin(x) + b\cos(x)$.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Périodicité d'une somme. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe un réel $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout réel x.

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, T et T' deux réels strictement positifs. On suppose que f est T-périodique, que g est T'-périodique et que $\dfrac{T}{T'}$ est rationnel. Montrer que $f+g$ est périodique.
2. Soit α un nombre irrationnel. On pose, pour tout réel x, $f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$.
   (a) Montrer que le seul réel x tel que $f(x) = 2$ est $x = 0$.
   (b) La fonction f est-elle périodique ?

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

On rappelle que, pour tout réel a, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 \geqslant 0$, et déterminer le cas d'égalité.
2. Pour quelles valeurs du réel λ la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_\lambda(x) = \cos^6(x) + \sin^6(x) - \lambda\cos(4x)$$
est-elle constante ?

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

Soit α l'unique élément de $[0\,;\pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. On rappelle que, pour tout réel a, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

1. Calculer $\cos(2\alpha)$, puis $\cos(4\alpha)$.
2. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $4\alpha = \alpha + 2k\pi$ ou $4\alpha = -\alpha + 2k\pi$.
3. Conclure que $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆⋆

Montrer que, pour tout réel x :
$$\cos\big(\sin(x)\big) > \sin\big(\cos(x)\big)$$

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆⋆

Une formule de Viète.

Partie A : radicaux itérés. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre formé de n radicaux :
$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}$$

de sorte que $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. En utilisant l'identité $1+\cos(2a) = 2\cos^2(a)$, valable pour tout réel a, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Partie B : un produit de cosinus. Soit x un réel qui n'est pas un multiple entier de π. En utilisant la formule de duplication du sinus, $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, simplifier, pour tout entier $n \geqslant 1$, le produit

$$P_n(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Partie C : la formule.

1. Déterminer la limite de la suite $(P_n(x))$.
2. On pose, pour $n \geqslant 1$, $v_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2^n} = \frac{2}{\pi}$$

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆⋆

Les intégrales de Wallis. Pour tout entier naturel n, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, en écrivant $\cos^{n+2}(t) = \cos(t) \times \cos^{n+1}(t)$, montrer que, pour tout entier naturel n :
$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$
3. En déduire que $W_n > 0$ pour tout n, et exprimer W_{2k} et W_{2k+1} en fonction de k.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, $W_{n+1} \leqslant W_n$.
5. En utilisant la question 2, en déduire que $\dfrac{n+1}{n+2} W_n \leqslant W_{n+1}$.
6. Déterminer la limite de $\dfrac{W_{n+1}}{W_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Conclure que
$$\left(\frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2k)}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$