CORRIGÉ – CHAPITRE 10

LOI DES GRANDS NOMBRES

Échantillon d'une variable aléatoire

EXERCICE 1 ⋆

On applique la proposition 1 du cours, avec $\mu = 12$ et $\sigma^2 = 9$:

$$E(S_n) = n\mu \quad ; \quad V(S_n) = n\sigma^2 \quad ; \quad E(M_n) = \mu \quad ; \quad V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

1. Pour $n = 4$:

$$E(S_4) = 4 \times 12 = 48 \quad ; \quad V(S_4) = 4 \times 9 = 36 \quad ; \quad E(M_4) = 12 \quad ; \quad V(M_4) = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(S_4) = 48 \quad ; \quad V(S_4) = 36 \\ E(M_4) = 12 \quad ; \quad V(M_4) = 2{,}25 \end{array}}$$

2. On procède de la même manière pour $n = 25$:

$$\boxed{\begin{array}{l} E(S_{25}) = 300 \quad ; \quad V(S_{25}) = 225 \\ E(M_{25}) = 12 \quad ; \quad V(M_{25}) = \dfrac{9}{25} = 0{,}36 \end{array}}$$

3. Pour $n = 100$:

$$\boxed{\begin{array}{l} E(S_{100}) = 1\,200 \quad ; \quad V(S_{100}) = 900 \\ E(M_{100}) = 12 \quad ; \quad V(M_{100}) = 0{,}09 \end{array}}$$

4. Pour $n = 900$:

$$\boxed{\begin{array}{l} E(S_{900}) = 10\,800 \quad ; \quad V(S_{900}) = 8\,100 \\ E(M_{900}) = 12 \quad ; \quad V(M_{900}) = 0{,}01 \end{array}}$$

On remarque que l'espérance de M_n ne dépend pas de n, alors que sa variance est divisée par n : c'est exactement ce que dit la remarque du cours, « augmenter la taille de l'échantillon ne déplace pas la cible, cela réduit la dispersion des tirs ».

EXERCICE 2 ⋆

1. La variable X prend les valeurs 1, 2, …, 6, chacune avec la probabilité $\frac{1}{6}$. Donc :

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \boxed{\frac{7}{2} = 3{,}5}$$

Pour la variance, on passe par $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \boxed{\frac{35}{12}}$$

Piège : on n'oublie pas d'élever $E(X)$ au carré. Écrire $V(X) = \frac{91}{6} - \frac{7}{2}$ est l'erreur la plus fréquente.

2. Les 12 lancers forment un échantillon de taille 12 de la loi de X :

$$E(S_{12}) = 12 \times \frac{7}{2} = 42 \quad ; \quad V(S_{12}) = 12 \times \frac{35}{12} = 35$$

$$E(M_{12}) = \frac{7}{2} \quad ; \quad V(M_{12}) = \frac{35/12}{12} = \frac{35}{144}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(S_{12}) = 42 \quad ; \quad V(S_{12}) = 35 \\ E(M_{12}) = 3{,}5 \quad ; \quad V(M_{12}) = \dfrac{35}{144} \end{array}}$$

3. On procède de la même manière avec $n = 1000$:

$$E(S_{1000}) = 3\,500 \quad ; \quad V(S_{1000}) = 1000 \times \frac{35}{12} = \frac{8\,750}{3} \approx 2\,916{,}67$$

$$V(M_{1000}) = \frac{35}{12 \times 1000} = \frac{7}{2\,400} \approx 0{,}0029$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(S_{1000}) = 3\,500 \quad ; \quad V(S_{1000}) \approx 2\,916{,}67 \\ E(M_{1000}) = 3{,}5 \quad ; \quad V(M_{1000}) \approx 0{,}0029 \end{array}}$$

EXERCICE 3 ⋆

1. Les tirages sont effectués *avec remise* : la composition de l'urne est la même à chaque tirage, donc les variables X_1, …, X_{50} sont indépendantes et suivent toutes la même loi. Chacune ne prend que les valeurs 0 et 1, avec $P(X_i = 1) = 0{,}3$.

$$\boxed{\text{Il s'agit bien d'un échantillon de taille 50 de la loi de Bernoulli de paramètre 0,3.}}$$

2. Pour une loi de Bernoulli de paramètre p :

$$E(X_1) = p = \boxed{0{,}3} \qquad \text{et} \qquad V(X_1) = p(1-p) = 0{,}3 \times 0{,}7 = \boxed{0{,}21}$$

3. On applique la proposition 1 :

$$E(S_{50}) = 50 \times 0{,}3 = 15 \quad ; \quad V(S_{50}) = 50 \times 0{,}21 = 10{,}5$$

$$E(M_{50}) = 0{,}3 \quad ; \quad V(M_{50}) = \frac{0{,}21}{50} = 0{,}0042$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(S_{50}) = 15 \quad ; \quad V(S_{50}) = 10{,}5 \\ E(M_{50}) = 0{,}3 \quad ; \quad V(M_{50}) = 0{,}0042 \end{array}}$$

4. La variable S_{50} compte le nombre de succès lors de 50 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes :

$$\boxed{S_{50} \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(50\,;0{,}3).}$$

Les formules du chapitre 2 donnent $E(S_{50}) = np = 15$ et $V(S_{50}) = np(1-p) = 10{,}5$: on retrouve bien les valeurs de la question 3.

5. On a $M_{50} = \dfrac{S_{50}}{50}$, quotient du nombre de boules rouges obtenues par le nombre de tirages.

$$\boxed{M_{50} \text{ est la fréquence de boules rouges observée sur les 50 tirages.}}$$

EXERCICE 4 ⋆

1. On part de $E(S_n) = n\mu$:

$$30\mu = 210 \iff \mu = \frac{210}{30} = \boxed{7}$$

2. On part de $V(S_n) = n\sigma^2$:

$$12\sigma^2 = 48 \iff \sigma^2 = \frac{48}{12} = \boxed{4}$$

3. On part de $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$:

$$\frac{20}{n} = 0{,}05 \iff n = \frac{20}{0{,}05} = \boxed{400}$$

4. L'écart-type de M_n vaut 0,2, donc sa variance vaut $0{,}2^2 = 0{,}04$. Comme $\sigma = 4$, on a $\sigma^2 = 16$:

$$\frac{16}{n} = 0{,}04 \iff n = \frac{16}{0{,}04} = \boxed{400}$$

Piège : la proposition 1 porte sur la *variance* de M_n, pas sur son écart-type. Il faut donc élever 0,2 au carré avant d'utiliser la formule.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. On a $V(M_n) = \dfrac{36}{n}$, et l'écart-type est la racine carrée de la variance :

$$\boxed{\begin{array}{l} n = 9 \ : \ V(M_9) = 4 \text{ et } \sigma(M_9) = 2 \\ n = 36 \ : \ V(M_{36}) = 1 \text{ et } \sigma(M_{36}) = 1 \\ n = 144 \ : \ V(M_{144}) = 0{,}25 \text{ et } \sigma(M_{144}) = 0{,}5 \end{array}}$$

2. De façon générale :

$$\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Remplacer n par kn divise donc cet écart-type par $\sqrt{k}$. Pour obtenir une division par 3, il faut $\sqrt{k} = 3$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{Il faut multiplier } n \text{ par } 9.}$$

On le vérifie sur la question 1 : en passant de $n = 4$ à $n = 36$, l'écart-type passerait de 3 à 1.

3. On cherche le plus petit entier n tel que $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}1$, ce qui revient à $V(M_n) \leqslant 0{,}01$:

$$\frac{36}{n} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{36}{0{,}01} = 3\,600$$

$$\boxed{\text{La plus petite taille convenable est } n = 3\,600.}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. La somme des probabilités vaut $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 1$, et toutes sont positives :

$$\boxed{\text{Il s'agit bien d'une loi de probabilité.}}$$

$$E(X) = 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}4 = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}9 + 1{,}6 = \boxed{3}$$

$$E(X^2) = 1 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}3 + 16 \times 0{,}4 = 0{,}1 + 0{,}8 + 2{,}7 + 6{,}4 = 10$$

$$V(X) = 10 - 3^2 = \boxed{1}$$

2. Pour $n = 25$:

$$E(M_{25}) = \mu = \boxed{3} \qquad ; \qquad V(M_{25}) = \frac{1}{25} = 0{,}04 \quad \text{donc} \quad \sigma(M_{25}) = \sqrt{0{,}04} = \boxed{0{,}2}$$

3. On procède de la même manière pour $n = 100$:

$$E(M_{100}) = \boxed{3} \qquad ; \qquad V(M_{100}) = \frac{1}{100} = 0{,}01 \quad \text{donc} \quad \sigma(M_{100}) = \boxed{0{,}1}$$

On multiplie n par 4 et l'écart-type est divisé par 2 : c'est la règle établie à l'exercice 5.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Ici $\mu = 250$ et $\sigma = 4$, donc $\sigma^2 = 16$, et $n = 64$.

1. On additionne les masses des 64 pièces :

$$E(S_{64}) = 64 \times 250 = \boxed{16\,000 \text{ g}}$$

$$V(S_{64}) = 64 \times 16 = 1\,024 \qquad \text{donc} \qquad \sigma(S_{64}) = \sqrt{1\,024} = \boxed{32 \text{ g}}$$

2. La masse moyenne se déduit de la proposition 1 :

$$E(M_{64}) = \boxed{250 \text{ g}}$$

$$V(M_{64}) = \frac{16}{64} = 0{,}25 \qquad \text{donc} \qquad \sigma(M_{64}) = \sqrt{0{,}25} = \boxed{0{,}5 \text{ g}}$$

3. L'écart-type de la masse totale (32 g) est bien plus grand que celui d'une seule pièce (4 g), alors que celui de la masse moyenne (0,5 g) est bien plus petit.

> En additionnant, les fluctuations s'accumulent : $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$ augmente.
> En moyennant, elles se compensent : $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ diminue.

Inégalité de Markov

EXERCICE 8 ⋆

La variable X est positive et $E(X) = 6$: l'inégalité de Markov s'applique et donne $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{6}{a}$.

1. $P(X \geqslant 8) \leqslant \dfrac{6}{8} = \boxed{0{,}75}$ **2.** $P(X \geqslant 12) \leqslant \dfrac{6}{12} = \boxed{0{,}5}$

3. $P(X \geqslant 30) \leqslant \dfrac{6}{30} = \boxed{0{,}2}$ **4.** $P(X \geqslant 60) \leqslant \dfrac{6}{60} = \boxed{0{,}1}$

5. $P(X \geqslant 100) \leqslant \dfrac{6}{100} = \boxed{0{,}06}$

On constate que la majoration est d'autant meilleure que le seuil est éloigné de l'espérance.

EXERCICE 9 ⋆

1. La variable T est positive et $E(T) = 25$:

$$P(T \geqslant 50) \leqslant \frac{25}{50} = \boxed{0{,}5} \qquad P(T \geqslant 75) \leqslant \frac{25}{75} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0{,}333} \qquad P(T \geqslant 100) \leqslant \frac{25}{100} = \boxed{0{,}25}$$

2. Une heure et quart représente 75 minutes, et « plus d'un jour sur trois » signifie $P(T \geqslant 75) > \frac{1}{3}$. Or l'inégalité de Markov garantit $P(T \geqslant 75) \leqslant \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{Le propos est incompatible avec la majoration : l'automobiliste exagère.}}$$

EXERCICE 10 ⋆

1. L'inégalité de Markov donne $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{8}{a}$. Pour que cette majoration garantisse 0,05, il suffit que :

$$\frac{8}{a} \leqslant 0{,}05 \iff a \geqslant \frac{8}{0{,}05} = 160$$

$$\boxed{\text{Le plus petit seuil convenable est } a = 160.}$$

2. On procède de la même manière :

$$\frac{8}{a} \leqslant 0{,}01 \iff a \geqslant \frac{8}{0{,}01} = 800 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{a = 800}$$

3. Dans le cas général, avec $\alpha \in]0\,;1]$:

$$\frac{E(X)}{a} \leqslant \alpha \iff a \geqslant \frac{E(X)}{\alpha} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{a = \frac{E(X)}{\alpha}}$$

Diviser α par 10 multiplie donc le seuil par 10 : on retrouve le passage de 160 à 800 entre les questions 1 et 2 lorsque α passe de 0,05 à 0,01.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. On applique la définition de l'espérance :

$$E(X) = 0 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}1 + 10 \times 0{,}05 = 0 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}5 = \boxed{2}$$

2. On additionne les probabilités des valeurs concernées :

$$P(X \geqslant 5) = 0{,}1 + 0{,}05 = \boxed{0{,}15} \qquad P(X \geqslant 10) = \boxed{0{,}05}$$

$$P(X \geqslant 2) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}05 = \boxed{0{,}45}$$

3. L'inégalité de Markov donne $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{2}{a}$:

$$P(X \geqslant 5) \leqslant \frac{2}{5} = \boxed{0{,}4} \qquad P(X \geqslant 10) \leqslant \frac{2}{10} = \boxed{0{,}2} \qquad P(X \geqslant 2) \leqslant \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

4. On rassemble les résultats :

	$P(X \geqslant 5)$	$P(X \geqslant 10)$	$P(X \geqslant 2)$
valeur exacte	0,15	0,05	0,45
majorant de Markov	0,4	0,2	1

Le majorant est à chaque fois nettement supérieur à la valeur exacte : c'est le prix de la généralité de l'inégalité, qui ne suppose rien sur la loi de X hormis sa positivité.

Pour $a = 2$, le majorant vaut 1 : il n'apporte aucune information, car toute probabilité est $\leqslant 1$.

Ce cas est étudié en toute généralité à l'exercice 12.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. L'inégalité de Markov donne :

$$P(X \geqslant 4) \leqslant \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Le majorant dépasse 1 : l'information est vraie, mais inutile.

En effet, toute probabilité est déjà inférieure ou égale à 1.

2. Soit a un réel tel que $0 < a \leqslant \mu$. En divisant les deux membres de $a \leqslant \mu$ par a, qui est strictement positif, on obtient :

$$1 \leqslant \frac{\mu}{a}$$

Le majorant fourni par l'inégalité de Markov est donc supérieur ou égal à 1.

Si $a \leqslant \mu$, l'inégalité de Markov n'apporte jamais d'information.

Autrement dit, cette inégalité n'est utile que pour des seuils *strictement supérieurs* à l'espérance.

3. La variable X est positive (elle prend ses valeurs dans $[0\,;20]$) et $E(X) = 11$, donc :

$$P(X \geqslant 12) \leqslant \frac{11}{12} \approx 0{,}917$$

L'affirmation est fausse : Markov ne garantit que 91,7 %, pas 50 %.

Le candidat a sans doute confondu « espérance » et « médiane ». Rien, dans les données, ne permet d'affirmer qu'au plus la moitié des candidats ont obtenu au moins 12.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. L'inégalité de Markov exige que la variable ne prenne que des valeurs *positives*. Or une température peut être négative, et l'énoncé indique seulement $X > -20$.

L'hypothèse de positivité n'est pas vérifiée : l'inégalité ne s'applique pas à X.

2. Comme $X > -20$, on a $X + 20 > 0$, donc $Y = X + 20$ est bien une variable aléatoire positive. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(X) + 20 = 6 + 20 = \boxed{26}$$

3. Pour tout réel x :

$$x \geqslant 12 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 20 \geqslant 32$$

Les événements $(X \geqslant 12)$ et $(Y \geqslant 32)$ sont donc réalisés exactement dans les mêmes cas : ils sont identiques, et ont la même probabilité. L'inégalité de Markov s'applique à Y :

$$P(X \geqslant 12) = P(Y \geqslant 32) \leqslant \frac{E(Y)}{32} = \frac{26}{32} = \boxed{0{,}8125}$$

4. L'élève annonçait 0,5, alors que la seule majoration légitime est 0,8125.

La majoration de l'élève est bien plus forte que ce que l'on peut garantir : elle est infondée.

On retient la méthode : lorsqu'une variable est minorée par un réel m, on applique l'inégalité de Markov à $X - m$, qui est positive.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

EXERCICE 14 ⋆

Ici $\mu = 50$ et $\sigma^2 = 16$, donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit $P(|X - 50| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{16}{\delta^2}$.

1. $P(|X - 50| \geqslant 8) \leqslant \dfrac{16}{8^2} = \dfrac{16}{64} = \boxed{0{,}25}$ **2.** $P(|X - 50| \geqslant 10) \leqslant \dfrac{16}{100} = \boxed{0{,}16}$

3. $P(|X - 50| \geqslant 20) \leqslant \dfrac{16}{400} = \boxed{0{,}04}$ **4.** $P(|X - 50| \geqslant 4) \leqslant \dfrac{16}{16} = \boxed{1}$

La quatrième majoration n'apporte aucune information, puisque toute probabilité est $\leqslant 1$.

C'est le cas $\delta \leqslant \sigma$, analogue pour Bienaymé-Tchebychev du cas $a \leqslant \mu$ rencontré à l'exercice 12 pour Markov.

EXERCICE 15 ⋆

L'écart-type vaut 1,5, donc $\sigma^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

1. On applique l'inégalité avec $\delta = 3$:

$$P(|X - 20| \geqslant 3) \leqslant \frac{2{,}25}{3^2} = \frac{2{,}25}{9} = \boxed{0{,}25}$$

2. Les événements $(|X - 20| \geqslant 3)$ et $(|X - 20| < 3)$ sont contraires l'un de l'autre, et :

$$|X - 20| < 3 \iff -3 < X - 20 < 3 \iff 17 < X < 23$$

Donc :

$$P(17 < X < 23) = 1 - P(|X - 20| \geqslant 3) \geqslant 1 - 0{,}25 = \boxed{0{,}75}$$

Piège : en passant à l'événement contraire, l'inégalité change de sens. On *minore* désormais, alors qu'on *majorait* à la question 1.

3. On procède de la même manière avec $\delta = 5$:

$$P(|X - 20| \geqslant 5) \leqslant \frac{2{,}25}{25} = \boxed{0{,}09} \quad \text{puis} \quad P(15 < X < 25) \geqslant 1 - 0{,}09 = \boxed{0{,}91}$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. L'inégalité donne $P(|X - 60| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{9}{\delta^2}$. On cherche $\delta > 0$ tel que :

$$\frac{9}{\delta^2} \leqslant 0{,}04 \iff \delta^2 \geqslant \frac{9}{0{,}04} = 225 \iff \delta \geqslant 15$$

Le plus petit seuil convenable est $\delta = 15$.

2. On procède de la même manière :

$$\frac{9}{\delta^2} \leqslant 0{,}01 \iff \delta^2 \geqslant 900 \iff \delta \geqslant 30$$

$\delta = 30$, ce qui correspond à l'intervalle $]30\,;90[$.

3. Si la variance est divisée par 4, elle vaut $\dfrac{9}{4} = 2{,}25$ et l'exigence devient :

$$\frac{2{,}25}{\delta^2} \leqslant 0{,}01 \iff \delta^2 \geqslant 225 \iff \delta \geqslant 15$$

Le seuil passe de 30 à 15 : il est divisé par 2.

Diviser la variance par 4 divise l'écart-type par 2, et le seuil suit l'écart-type : c'est ce que confirme l'exercice 17.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = k\sigma$, qui est bien un réel strictement positif puisque $k \geqslant 1$ et $\sigma > 0$:

$$P(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \boxed{\frac{1}{k^2}}$$

On remarque que le résultat ne dépend ni de σ, ni de la loi de X.

2. Le minorant de $P(|X-\mu| < k\sigma)$ s'obtient en passant à l'événement contraire, donc vaut $1-\dfrac{1}{k^2}$:

k	2	3	4	5
majorant de $P(\lvert X-\mu\rvert \geqslant k\sigma)$	0,25	$\approx 0{,}111$	0,0625	0,04
minorant de $P(\lvert X-\mu\rvert < k\sigma)$	0,75	$\approx 0{,}889$	0,9375	0,96

3. La colonne $k = 2$ donne directement la réponse :

Au moins 75 % des valeurs se situent à moins de deux écarts-types de l'espérance.

4. Pour $k = 1$, le majorant vaut $\dfrac{1}{1^2} = 1$.

Le majorant vaut 1 : aucune information, comme à la question 4 de l'exercice 14.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. On répète 10 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès « obtenir pile » a pour probabilité 0,5 :

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}5)$.

$$E(X) = 10 \times 0{,}5 = \boxed{5} \qquad ; \qquad V(X) = 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = \boxed{2{,}5}$$

2. On applique l'inégalité avec $\delta = 3$:

$$P(|X-5| \geqslant 3) \leqslant \frac{2{,}5}{3^2} = \frac{2{,}5}{9} = \frac{5}{18} \approx \boxed{0{,}278}$$

3. Comme X prend des valeurs entières :

$$|X-5| \geqslant 3 \iff X-5 \leqslant -3 \text{ ou } X-5 \geqslant 3 \iff X \leqslant 2 \text{ ou } X \geqslant 8$$

Ces deux événements sont incompatibles, donc leurs probabilités s'ajoutent. Par symétrie de la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}5)$, ils ont de plus la même probabilité :

$$P(X \leqslant 2) = \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}}{2^{10}} = \frac{1+10+45}{1\,024} = \frac{56}{1\,024} = \frac{7}{128}$$

$$P(|X-5| \geqslant 3) = 2 \times \frac{7}{128} = \frac{7}{64} = \boxed{0{,}109\,375}$$

4. La valeur exacte vaut environ 0,109, le majorant environ 0,278 : le majorant est plus de deux fois trop grand.

La majoration est correcte mais grossière : elle n'utilise que μ et σ^2, pas la loi de X.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. On applique les définitions :

$$E(X) = (-1) \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}8 + 1 \times 0{,}1 = \boxed{0}$$

$$E(X^2) = 1 \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}8 + 1 \times 0{,}1 = 0{,}2 \qquad \text{donc} \qquad V(X) = 0{,}2 - 0^2 = \boxed{0{,}2}$$

2. L'événement $(|X| \geqslant 1)$ est réalisé pour $X = -1$ et pour $X = 1$:

$$P(|X| \geqslant 1) = 0{,}1 + 0{,}1 = \boxed{0{,}2}$$

3. Comme $\mu = 0$, l'inégalité avec $\delta = 1$ s'écrit :

$$P(|X-0| \geqslant 1) \leqslant \frac{0{,}2}{1^2} = \boxed{0{,}2}$$

Le majorant est exactement égal à la valeur exacte : l'inégalité est une égalité.

4. Supposons qu'il existe une quantité $c < \dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$ majorant toujours $P(|X-\mu| \geqslant \delta)$. Appliquée à la variable de cet exercice avec $\delta = 1$, elle donnerait $0{,}2 \leqslant c < 0{,}2$, ce qui est impossible.

Non : le majorant $\dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$ ne peut pas être amélioré dans le cas général.

Cela n'empêche pas la majoration d'être très grossière pour une loi *particulière*, comme on l'a vu à l'exercice 18 avec la loi binomiale.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Un sachet est conforme lorsque $|X - 500| < 6$. On majore d'abord l'événement contraire :

$$P(|X-500| \geqslant 6) \leqslant \frac{4}{6^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(494 < X < 506) = 1 - P(|X-500| \geqslant 6) \geqslant 1 - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{9} \approx 0{,}889}$$

Au moins 88,9 % des sachets sont conformes.

2. On veut $P(|X-500| \geqslant \delta) \leqslant 0{,}01$:

$$\frac{4}{\delta^2} \leqslant 0{,}01 \iff \delta^2 \geqslant 400 \iff \delta \geqslant 20$$

$\delta = 20$, soit l'intervalle $]480\,;520[$.

3. L'intervalle obtenu a une demi-largeur de 20 grammes, soit dix écarts-types, alors que l'écart-type de X ne vaut que $\sqrt{4} = 2$ grammes.

L'intervalle est très large : c'est le prix d'une garantie valable pour *toute* loi.

Si l'on connaissait la loi de X, on pourrait obtenir un intervalle bien plus resserré pour la même exigence.

Inégalité de concentration

EXERCICE 21 ⋆

L'inégalité de concentration s'écrit ici $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}5) \leqslant \dfrac{4}{n \times 0{,}5^2} = \dfrac{4}{0{,}25\,n} = \dfrac{16}{n}$.

1. $n = 100$: $\dfrac{16}{100} = \boxed{0{,}16}$ **2.** $n = 400$: $\dfrac{16}{400} = \boxed{0{,}04}$ **3.** $n = 1600$: $\dfrac{16}{1600} = \boxed{0{,}01}$

On constate que multiplier n par 4 divise le majorant par 4. Pour le diviser encore par 4 à partir de $n = 1600$:

$$\boxed{\text{Il faudrait } n = 6\,400.}$$

EXERCICE 22 ⋆

1. « S'écarter de moins de 0,3 avec une probabilité d'au moins 0,95 » revient à demander que l'événement contraire ait une probabilité d'au plus $\alpha = 0{,}05$. Il suffit donc que le majorant de l'inégalité de concentration soit inférieur ou égal à 0,05 :

$$\boxed{\frac{9}{n \times 0{,}3^2} \leqslant 0{,}05}$$

2. On isole n :

$$\frac{9}{0{,}09\,n} \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant \frac{9}{0{,}05 \times 0{,}09} = \frac{9}{0{,}0045} = 2\,000$$

$$\boxed{\text{La plus petite taille convenable est } n = 2\,000.}$$

3. Vérification :

$$\frac{9}{2\,000 \times 0{,}09} = \frac{9}{180} = \boxed{0{,}05}$$

L'exigence est donc satisfaite, et de justesse : c'est bien le plus petit entier convenable.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. On a $\sigma^2 = \dfrac{35}{12}$, $\delta = 0{,}05$ et $\alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$. On applique la méthode du cours :

$$\frac{35/12}{n \times 0{,}05^2} \leqslant 0{,}02 \iff n \geqslant \frac{35/12}{0{,}02 \times 0{,}0025} = \frac{35/12}{0{,}00005} = \frac{175\,000}{3} \approx 58\,333{,}3$$

$$\boxed{\text{Il faut au moins } 58\,334 \text{ lancers.}}$$

Piège : il faut prendre l'entier immédiatement *supérieur*. Avec 58 333 lancers, le majorant dépasserait encore 0,02.

2. Deux exigences ont été renforcées par rapport au cours :

- le seuil δ est passé de 0,1 à 0,05, donc a été divisé par 2 ; comme δ intervient au carré au dénominateur, cela multiplie n par 4 ;
- le risque α est passé de 0,05 à 0,02, donc a été divisé par 2,5, ce qui multiplie n par 2,5.

Au total n est multiplié par $4 \times 2{,}5 = 10$: on retrouve bien $5\,834 \times 10 \approx 58\,334$.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. L'exigence s'écrit :

$$\frac{1}{n\delta^2} \leqslant 0{,}05 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant \frac{1}{0{,}05 \times \delta^2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{n = \frac{20}{\delta^2}}$$

(le plus petit entier supérieur ou égal à cette quantité).

2. On applique la formule précédente :

$$\delta = 1 \ : \ n = \frac{20}{1} = \boxed{20} \qquad \delta = 0{,}1 \ : \ n = \frac{20}{0{,}01} = \boxed{2\,000} \qquad \delta = 0{,}01 \ : \ n = \frac{20}{0{,}0001} = \boxed{200\,000}$$

3. On constate que la taille est multipliée par 100 à chaque fois. Démontrons-le : en remplaçant δ par $\dfrac{\delta}{10}$, la taille devient

$$\frac{20}{\left(\dfrac{\delta}{10}\right)^2} = \frac{20}{\dfrac{\delta^2}{100}} = 100 \times \frac{20}{\delta^2}$$

Diviser δ par 10 multiplie la taille de l'échantillon par 100.

C'est le prix de la précision, déjà signalé dans le cours. On en verra une conséquence spectaculaire à l'exercice 34.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

1. La variable X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

$$E(X_1) = \boxed{p} \qquad \text{et} \qquad V(X_1) = \boxed{p(1-p)}$$

2. On étudie le signe de la différence :

$$\frac{1}{4} - p(1-p) = \frac{1}{4} - p + p^2 = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$$

Un carré étant toujours positif, on obtient $\dfrac{1}{4} - p(1-p) \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{p(1-p) \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{pour tout } p \in [0\,;1]}$$

3. L'inégalité de concentration appliquée à M_n, dont l'espérance vaut p et la variance $\dfrac{p(1-p)}{n}$, donne :

$$P\big(|M_n - p| \geqslant \delta\big) \ \leqslant \ \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

Or $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ d'après la question 2, et $n\delta^2 > 0$:

$$\boxed{P\big(|M_n - p| \geqslant \delta\big) \ \leqslant \ \frac{1}{4n\delta^2}}$$

4. « Moins de 3 points de pourcentage » signifie $\delta = 0{,}03$, et « avec une probabilité d'au moins 0,95 » signifie $\alpha = 0{,}05$:

$$\frac{1}{4n \times 0{,}03^2} \leqslant 0{,}05 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant \frac{1}{4 \times 0{,}05 \times 0{,}0009} = \frac{1}{0{,}00018} \approx 5\,555{,}6$$

Il faut interroger au moins 5 556 personnes.

5. Le majorant $\dfrac{1}{4n\delta^2}$ ne contient plus p.

La réponse ne dépend pas de p, qui est pourtant la quantité inconnue que l'on cherche.

C'est tout l'intérêt de la majoration de la question 2 : sans elle, il faudrait connaître p pour calculer la taille de l'échantillon permettant d'estimer p.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

Ici $\mu = 20$ et $\sigma = 0{,}5$, donc $\sigma^2 = 0{,}25$.

1. La proposition 1 donne :

$$E(M_{100}) = \mu = \boxed{20} \qquad ; \qquad V(M_{100}) = \frac{0{,}25}{100} = \boxed{0{,}0025}$$

2. On applique l'inégalité de concentration :

$$P\big(|M_{100} - 20| \geqslant 0{,}1\big) \leqslant \frac{0{,}25}{100 \times 0{,}1^2} = \frac{0{,}25}{1} = \boxed{0{,}25}$$

3. En passant à l'événement contraire :

$$P(19{,}9 < M_{100} < 20{,}1) = 1 - P\big(|M_{100} - 20| \geqslant 0{,}1\big) \geqslant 1 - 0{,}25 = \boxed{0{,}75}$$

4. On cherche n tel que le majorant soit inférieur ou égal à 0,01 :

$$\frac{0{,}25}{n \times 0{,}01} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{0{,}25}{0{,}01 \times 0{,}01} = \frac{0{,}25}{0{,}0001} = 2\,500$$

Le service qualité doit prélever au moins 2 500 tiges.

5. Si l'écart-type de X est divisé par 5, il vaut 0,1 et la variance devient 0,01. Avec $n = 100$:

$$P\big(|M_{100} - 20| \geqslant 0{,}1\big) \leqslant \frac{0{,}01}{100 \times 0{,}01} = \boxed{0{,}01}$$

Oui : cette solution atteint exactement l'exigence, sans prélever davantage de tiges.

Les deux leviers sont donc équivalents ici : augmenter n ou réduire σ^2 agissent de la même façon sur le majorant $\dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$.

Loi faible des grands nombres

EXERCICE 27 ⋆

1. L'inégalité de concentration appliquée avec $\sigma^2 = 5$ et $\delta = 0{,}2$ donne, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$P\big(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}2\big) \leqslant \frac{5}{n \times 0{,}2^2} = \frac{5}{0{,}04\,n} = \boxed{\frac{125}{n}}$$

2. On remplace n par chacune des trois valeurs :

$$n = 125 \ : \ \frac{125}{125} = \boxed{1} \qquad n = 1\,250 \ : \ \frac{125}{1\,250} = \boxed{0{,}1} \qquad n = 12\,500 \ : \ \frac{125}{12\,500} = \boxed{0{,}01}$$

Pour $n = 125$, le majorant vaut 1 : il n'apporte encore aucune information.

3. La suite de terme général $\dfrac{125}{n}$ est de la forme $\dfrac{C}{n}$ avec $C = 125$ constante, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{125}{n} = \boxed{0}$$

Comme une probabilité est toujours positive, on dispose de l'encadrement $0 \leqslant P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}2) \leqslant \dfrac{125}{n}$, dont les deux membres extrêmes tendent vers 0.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}2) = 0}$$

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. L'inégalité de gauche vient de ce qu'une probabilité est toujours positive. Celle de droite est l'inégalité de concentration avec $\sigma^2 = 2$ et $\delta = 0{,}01$:

$$\frac{\sigma^2}{n\delta^2} = \frac{2}{n \times 0{,}01^2} = \frac{2}{0{,}0001\,n} = \frac{20\,000}{n}$$

$$\boxed{0 \leqslant P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}01) \leqslant \frac{20\,000}{n} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1}$$

2. On rédige la conclusion :

- la suite constante nulle converge vers 0 ;
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{20\,000}{n} = 0$, comme quotient d'une constante par une suite tendant vers $+\infty$.

D'après le théorème des gendarmes, établi au chapitre 3 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}01) = 0}$$

3. Pour un réel $\delta > 0$ quelconque, le même raisonnement donne :

$$0 \leqslant P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{2}{n\delta^2}$$

Comme δ est *fixé*, la quantité $\dfrac{2}{\delta^2}$ est une constante, et le majorant tend encore vers 0.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0 \quad \text{pour tout réel } \delta > 0}$$

C'est exactement l'énoncé de la loi faible des grands nombres. On remarque que δ doit être choisi *avant* de faire tendre n vers $+\infty$.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Alice.

Affirmation fausse.

Le théorème porte sur une *probabilité*, pas sur la variable M_n elle-même. Rien n'interdit à un échantillon, même très grand, de donner une moyenne éloignée de μ : cet événement devient seulement de moins en moins probable. Sur la simulation du cours, la courbe finit par ne plus quitter la bande, mais aucun théorème ne garantit qu'elle n'en sortira plus jamais.

Bruno.

Affirmation vraie.

C'est la traduction correcte de $\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}01) = 0$: la probabilité peut être rendue aussi petite que l'on veut pourvu que n soit assez grand. C'est le contenu de la question 2 de l'exercice 28.

Chloé.

Affirmation fausse.

Le théorème est valable *pour tout* réel $\delta > 0$, aussi petit soit-il. Simplement, plus δ est petit, plus il faut prendre n grand pour que le majorant $\dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$ devienne petit : c'est le prix de la précision chiffré à l'exercice 24.

Dorian.

Affirmation fausse.

Le raisonnement confond une quantité et son majorant. Savoir que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, avec (v_n) décroissante, ne dit rien sur le sens de variation de (u_n). On sait seulement que $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta)$ tend vers 0, pas qu'elle décroît.

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. La variable X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$, puisque le dé est équilibré :

$$E(X_1) = \boxed{\frac{1}{6}} \qquad ; \qquad V(X_1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{36}}$$

2. L'inégalité de concentration s'écrit, pour tout réel $\delta > 0$:

$$\boxed{P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{5}{36\,n\,\delta^2}}$$

3. À δ fixé, le majorant est de la forme $\dfrac{C}{n}$ avec $C = \dfrac{5}{36\delta^2}$ constante, donc il tend vers 0. Le théorème des gendarmes donne alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \delta\right) = 0}$$

La fréquence du 6 finit par s'approcher de $\dfrac{1}{6}$ au sens des probabilités.

C'est la conviction évoquée dès la première ligne du chapitre, désormais démontrée.

4. On applique la méthode du cours avec $\delta = 0{,}01$ et $\alpha = 0{,}05$:

$$\frac{5/36}{n \times 0{,}01^2} \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant \frac{5/36}{0{,}05 \times 0{,}0001} = \frac{5/36}{0{,}000005} = \frac{250\,000}{9} \approx 27\,777{,}8$$

Il faut au moins 27 778 lancers.

EXERCICE 31 : QCM

Question	Réponse	Justification
1.	**a**	$V(M_{25}) = \dfrac{\sigma^2}{25} = \dfrac{100}{25} = 4$.
2.	**c**	$E(S_{10}) = 10\mu = 10 \times 40 = 400$.
3.	**a**	$P(X \geqslant 15) \leqslant \dfrac{E(X)}{15} = \dfrac{3}{15} = 0{,}2$.
4.	**b**	$P(\lvert X - 10\rvert \geqslant 5) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{5^2} = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$.
5.	**b**	$\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$: multiplier n par 4 multiplie $\sqrt{n}$ par 2.
6.	**c**	$\dfrac{\sigma^2}{n\delta^2} = \dfrac{12}{300 \times 0{,}04} = \dfrac{12}{12} = 1$: aucune information.
7.	**a**	La positivité est la seule hypothèse du théorème 1 (voir l'exercice 13).
8.	**a**	C'est l'énoncé même de la loi faible des grands nombres.
9.	**b**	$\dfrac{1}{n \times 0{,}01} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant 10\,000$.
10.	**b**	$V(X) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$, donc $V(M_{400}) = \dfrac{0{,}16}{400} = 0{,}0004$.

Piège de la question 10 : la réponse **a** est la variance de X, pas celle de M_{400} ; il ne faut pas oublier de diviser par n.

EXERCICE 32 : VRAI OU FAUX

1. **Vraie** C'est la proposition 1 : $E(M_n) = \mu$, quelle que soit la valeur de n. La moyenne d'un échantillon « vise juste ».

2. **Fausse** On a $V(S_n) = n\sigma^2$, et c'est la variance de M_n qui vaut $\dfrac{\sigma^2}{n}$. La variance de la somme *augmente* avec n (exercice 7).

3. **Vraie** $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$; remplacer n par $4n$ remplace $\sqrt{n}$ par $2\sqrt{n}$.

4. **Fausse** L'hypothèse est que X ne prend que des valeurs *positives*. Une variable d'espérance strictement positive peut prendre des valeurs négatives, comme à l'exercice 13.

5. **Vraie** Dès que $\delta \leqslant \sigma$, le majorant $\dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$ est supérieur ou égal à 1 et n'apporte aucune information (exercice 14, question 4).

6. **Fausse** Elle majore la *probabilité* d'un écart. Aucun théorème du chapitre n'affirme que M_n devient égale à μ (exercice 29, affirmation d'Alice).

7. **Vraie** C'est le cas $k = 2$ de l'exercice 17 : $P(\lvert X - \mu\rvert \geqslant 2\sigma) \leqslant \dfrac{1}{2^2} = 0{,}25$.

8. **Vraie** Le théorème 4 affirme que $\lim_{n\to+\infty} P(\lvert M_n - \mu\rvert \geqslant \delta) = 0$: il s'agit bien de la limite d'une suite de probabilités.

9. **Fausse** Le majorant $\dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$ est *inversement proportionnel* à n : augmenter n de 10 % divise le majorant par 1,1 seulement.

10. **Vraie** Ce sont les deux conditions de la définition d'un échantillon.

EXERCICE 33 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

Partie A

1. Le joueur gagne 5 € s'il obtient un 6, ce qui a une chance sur six de se produire, et perd 1 € dans les cinq autres cas :

x_i	-1	5
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. On applique la définition de l'espérance :

$$E(X) = (-1)\times\frac{5}{6} + 5\times\frac{1}{6} = -\frac{5}{6}+\frac{5}{6} = \boxed{0}$$

L'espérance de gain est nulle : le jeu est équitable.

3. On passe par $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 1\times\frac{5}{6} + 25\times\frac{1}{6} = \frac{5+25}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 5 - 0 = \boxed{5}$$

Partie B

1. Les 100 parties étant indépendantes et identiques, elles forment un échantillon de taille 100 de la loi de X :

$$\begin{array}{|l|}\hline E(S_{100}) = 100\times 0 = 0 \quad ; \quad V(S_{100}) = 100\times 5 = 500 \\ E(M_{100}) = 0 \quad ; \quad V(M_{100}) = \dfrac{5}{100} = 0{,}05 \\ \hline\end{array}$$

2. Comme $E(M_{100}) = 0$, l'inégalité de concentration s'écrit :

$$P\big(|M_{100}-0| \geqslant 0{,}5\big) \leqslant \frac{5}{100\times 0{,}5^2} = \frac{5}{25} = \boxed{0{,}2}$$

3. Comme $S_{100} = 100\,M_{100}$, on a pour tout réel :

$$|S_{100}| \geqslant 50 \iff 100\,|M_{100}| \geqslant 50 \iff |M_{100}| \geqslant 0{,}5$$

Les deux événements sont identiques, donc :

$$\boxed{P\big(|S_{100}| \geqslant 50\big) \leqslant 0{,}2}$$

Après 100 parties, le joueur a donc au plus une chance sur cinq d'avoir gagné ou perdu 50 € ou plus.

Partie C

1. On cherche n tel que $P\big(|M_n| \geqslant 0{,}1\big) \leqslant 0{,}05$:

$$\frac{5}{n\times 0{,}1^2} \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant \frac{5}{0{,}05\times 0{,}01} = \frac{5}{0{,}0005} = 10\,000$$

Il faut au moins 10 000 parties.

2. La loi faible des grands nombres donne, pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(|M_n - 0| \geqslant \delta\big) = 0$$

Le gain moyen par partie se concentre autour de 0 lorsque le nombre de parties augmente.

Conclusion à l'attention du joueur : plus il joue, plus il est probable que son gain *moyen* soit proche de zéro. Le hasard peut lui être favorable sur quelques parties, mais la répétition ne fait que rendre l'enrichissement de plus en plus improbable.

EXERCICE 34 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

1. La variable X suit une loi de Bernoulli, dont le paramètre est la probabilité que le point tombe dans le quart de disque. D'après l'énoncé, cette probabilité est l'aire de ce quart de disque, soit $\dfrac{\pi \times 1^2}{4}$. Comme le carré est de côté 1, son aire vaut 1 et il n'y a pas lieu de diviser :

$$E(X) = P(X = 1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$V(X) = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16}}$$

2. On a établi à l'exercice 25 que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $p \in [0\,;1]$, l'égalité $\dfrac{1}{4} - p(1-p) = \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2$ montrant que la différence est un carré. En appliquant ce résultat à $p = \dfrac{\pi}{4}$, qui appartient bien à $[0\,;1]$:

$$\boxed{V(X) \leqslant \frac{1}{4}}$$

3. L'inégalité de concentration appliquée à M_n, d'espérance $\dfrac{\pi}{4}$ et de variance $\dfrac{V(X)}{n}$, donne :

$$P\left(\left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2} \leqslant \boxed{\frac{1}{4n\delta^2}}$$

4. Comme $Y_n = 4M_n$, on a $Y_n - \pi = 4\left(M_n - \dfrac{\pi}{4}\right)$, donc $|Y_n - \pi| = 4\left|M_n - \dfrac{\pi}{4}\right|$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$|Y_n - \pi| \geqslant \varepsilon \iff 4\left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| \geqslant \varepsilon \iff \left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

Les deux événements sont donc identiques et ont la même probabilité. On applique alors la question 3 avec $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$:

$$P\big(|Y_n - \pi| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{1}{4n\left(\dfrac{\varepsilon}{4}\right)^2} = \frac{1}{4n \times \dfrac{\varepsilon^2}{16}} = \boxed{\frac{4}{n\varepsilon^2}}$$

5. On veut $P\big(|Y_n - \pi| \geqslant 0{,}01\big) \leqslant 0{,}01$:

$$\frac{4}{n \times 0{,}01^2} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{4}{0{,}01 \times 0{,}0001} = \frac{4}{0{,}000001} = 4\,000\,000$$

Il faut au moins 4 millions de tirages.

6. Quatre millions de tirages pour deux décimales de π : c'est considérable, alors qu'une décimale supplémentaire coûterait cent fois plus, soit 400 millions de tirages (exercice 24).

La méthode converge très lentement : elle n'est pas compétitive pour calculer π.

Son intérêt est ailleurs : elle s'applique telle quelle à des aires ou des volumes que l'on ne sait pas calculer, ce qui n'est pas le cas ici. On notera aussi que la majoration obtenue reste une *garantie* : la précision réellement atteinte est en général bien meilleure, comme le laissait prévoir l'exercice 18.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. On applique les définitions :

$$E(X) = 0 \times 0{,}95 + 4\,000 \times 0{,}05 = \boxed{200 \text{ €}}$$

$$E(X^2) = 4\,000^2 \times 0{,}05 = 16\,000\,000 \times 0{,}05 = 800\,000$$

$$V(X) = 800\,000 - 200^2 = 800\,000 - 40\,000 = \boxed{760\,000}$$

L'écart-type vaut $\sqrt{760\,000} \approx 871{,}8$ €, soit bien plus que l'espérance : un contrat isolé est très imprévisible.

2. La proposition 1 donne :

$$E(M_{10\,000}) = \boxed{200 \text{ €}} \qquad ; \qquad V(M_{10\,000}) = \frac{760\,000}{10\,000} = \boxed{76}$$

L'écart-type du coût moyen n'est plus que de $\sqrt{76} \approx 8{,}7$ €.

3. La compagnie encaisse 250 € par contrat et dépense en moyenne $M_{10\,000}$ € par contrat. Elle est donc déficitaire lorsque $M_{10\,000} > 250$. Comme $250 = 200 + 50$:

$$(M_{10\,000} > 250) \text{ est inclus dans } (|M_{10\,000} - 200| \geqslant 50)$$

L'inégalité de concentration donne alors :

$$P(|M_{10\,000} - 200| \geqslant 50) \leqslant \frac{760\,000}{10\,000 \times 50^2} = \frac{760\,000}{25\,000\,000} = 0{,}0304$$

$$\boxed{P(M_{10\,000} > 250) \leqslant 0{,}0304}$$

Piège : l'inégalité de concentration porte sur un écart en *valeur absolue*, donc des deux côtés de l'espérance. On majore ici la probabilité d'un déficit par celle, plus grande, d'un écart dans un sens ou dans l'autre.

4. On cherche n tel que le majorant soit inférieur ou égal à 0,01 :

$$\frac{760\,000}{n \times 50^2} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{760\,000}{0{,}01 \times 2\,500} = \frac{760\,000}{25} = 30\,400$$

$$\boxed{\text{Il faut au moins } 30\,400 \text{ contrats.}}$$

5. Pour un contrat isolé, l'écart-type (872 € environ) dépasse largement l'espérance : la compagnie est incapable de prévoir si un client donné coûtera 0 ou 4 000 €. Mais la loi faible des grands nombres affirme que, pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - 200| \geqslant \delta) = 0$$

> Le coût *moyen* par contrat se concentre autour de 200 € lorsque n augmente,
> donc le coût *total* $S_n = n\,M_n$ devient prévisible avec une précision relative croissante.

C'est le principe même de la mutualisation du risque, cité en fin de chapitre : l'assureur ne prévoit pas les sinistres, il prévoit leur moyenne.

Pour aller plus loin

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

1. Comme X est à valeurs entières, l'événement $(X \geqslant k)$ est la réunion des deux événements incompatibles $(X = k)$ et $(X \geqslant k+1)$. Donc $P(X \geqslant k) = P(X = k) + P(X \geqslant k+1)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1)}$$

2. Notons $r_k = P(X \geqslant k)$; on a $r_{n+1} = 0$, puisque $X \leqslant n$. Par définition et d'après la question 1 :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\,(r_k - r_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} k\,r_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\,r_k$$

en posant $k+1 \to k$ dans la seconde somme. Le terme r_1 n'apparaît que dans la première somme, le terme r_{n+1} est nul, et pour $2 \leqslant k \leqslant n$, il reste $k\,r_k - (k-1)\,r_k = r_k$:

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)}$$

Vérification : pour un dé équilibré, $P(X \geqslant k) = \frac{7-k}{6}$, et $\sum_{k=1}^{6} \frac{7-k}{6} = \frac{6+5+4+3+2+1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$, l'espérance déjà calculée à l'exercice 2.

Interprétation : chaque valeur k est comptée k fois dans $E(X)$, une fois pour chacun des événements $(X \geqslant 1), \ldots, (X \geqslant k)$. Cette formule est souvent plus commode que la définition lorsque les probabilités $P(X \geqslant k)$ sont faciles à calculer, par exemple pour le maximum de plusieurs dés.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. Par linéarité de l'espérance : $\boxed{E(S_n) = n\,E(X)}$.

2. Les X_i étant indépendantes et de même loi, $V(S_n) = n\,V(X)$. La formule $V(S_n) = E(S_n^2) - E(S_n)^2$ donne alors

$$E(S_n^2) = n\,V(X) + n^2 E(X)^2 = n\Big(E(X^2) - E(X)^2\Big) + n^2 E(X)^2$$

$$\boxed{E(S_n^2) = n\,E(X^2) + n(n-1)\,E(X)^2}$$

3. Si $E(X) = 0$, alors $E(S_n^2) = n\,E(X^2)$. La variable S_n^2 est positive, et, comme $a\sqrt{n} > 0$, les événements $(|S_n| \geqslant a\sqrt{n})$ et $(S_n^2 \geqslant a^2 n)$ sont identiques. L'inégalité de Markov donne :

$$P(|S_n| \geqslant a\sqrt{n}) = P(S_n^2 \geqslant a^2 n) \leqslant \frac{E(S_n^2)}{a^2 n} = \boxed{\frac{E(X^2)}{a^2}}$$

4. La variable $Y = X - E(X)$ est d'espérance nulle et vérifie $E(Y^2) = V(X)$. Les variables $Y_i = X_i - E(X)$ forment un échantillon de la loi de Y, dont la somme vaut $S_n - nE(X)$. La question 3, appliquée à Y, donne :

$$\boxed{P(|S_n - nE(X)| \geqslant a\sqrt{n}) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}}$$

Interprétation : c'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n, mais lue autrement. L'écart typique de S_n à $nE(X)$ est de l'ordre de $\sqrt{n}$, et non de n : après 10 000 lancers d'une pièce, le nombre de « pile » s'écarte de 5 000 d'environ $\sqrt{10\,000} = 100$, à un facteur près. Divisé par n, cet écart devient $\frac{1}{\sqrt{n}}$, qui tend vers 0 : on retrouve la loi faible des grands nombres.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆⋆

L'expérience revient à choisir une permutation de $\{1\,;\ldots\,;n\}$: la boule i va dans l'urne $\sigma(i)$. Il y a $n!$ répartitions équiprobables (chapitre 7).

Soit i fixé. Les répartitions dans lesquelles la boule i est dans l'urne i correspondent aux façons de placer les $n-1$ autres boules dans les $n-1$ autres urnes : il y en a $(n-1)!$. Donc

$$P(X_i=1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\qquad\text{et}\qquad E(X_i)=\frac{1}{n}$$

Le nombre N de boules placées dans l'urne portant leur numéro vaut $X_1+\cdots+X_n$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(N)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\times\frac{1}{n}=\boxed{1}$$

Interprétation : quel que soit le nombre de boules, il y a en moyenne exactement une boule bien placée. Pour $n=3$, les six permutations ont respectivement 3, 1, 1, 1, 0 et 0 points fixes, de moyenne $\frac{6}{6}=1$.

Piège : les variables X_i ne sont pas indépendantes ; par exemple, si $n-1$ boules sont bien placées, la dernière l'est forcément. La linéarité de l'espérance, elle, ne demande aucune indépendance : c'est ce qui rend le calcul si court, alors que la loi de N est difficile à obtenir.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆⋆

Soient $i<j$. Quelle que soit la date d'anniversaire de la personne i, la personne j a la même date avec la probabilité $\frac{1}{365}$, par indépendance et équiprobabilité. Ainsi $E(X_{i,j})=P(X_{i,j}=1)=\frac{1}{365}$.

Le nombre N de paires ayant le même anniversaire est la somme des $X_{i,j}$ sur toutes les paires $\{i\,;j\}$, au nombre de $\binom{n}{2}$ (chapitre 7). Par linéarité :

$$\boxed{E(N)=\binom{n}{2}\times\frac{1}{365}=\frac{n(n-1)}{730}}$$

Exemples : pour $n=23$, $E(N)=\frac{253}{365}\approx 0{,}69$; pour $n=28$, $E(N)=\frac{378}{365}\approx 1{,}04$: dans une classe de 28 élèves, on compte en moyenne plus d'une paire d'élèves nés le même jour.

Interprétation : le nombre de paires croît comme n^2, et non comme n : c'est la raison profonde du paradoxe des anniversaires, rencontré au chapitre 2, où la probabilité d'une coïncidence dépasse $\frac{1}{2}$ dès 23 personnes.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆⋆

1. L'employé i ne peut recruter que les employés $i+1$, $i+2$, …, n. Lorsque l'employé $j+1$ est recruté ($j\geqslant i$), le recruteur est choisi parmi j employés, donc l'employé i n'est pas le recruteur avec la probabilité $1-\frac{1}{j}$. Les choix étant indépendants, la probabilité que i ne recrute personne vaut

$$\prod_{j=i}^{n-1}\left(1-\frac{1}{j}\right)=\prod_{j=i}^{n-1}\frac{j-1}{j}=\frac{i-1}{i}\times\frac{i}{i+1}\times\cdots\times\frac{n-2}{n-1}$$

Pour $i=1$, le premier facteur est nul : l'employé 1 recrute forcément l'employé 2. Pour $i\geqslant 2$, le produit se télescope. Pour $i=n$, il est vide et vaut 1, ce qui est cohérent puisque le dernier employé ne recrute personne.

$$\boxed{P(\text{l'employé } i \text{ ne recrute personne})=\frac{i-1}{n-1}\qquad\text{pour } 1\leqslant i\leqslant n}$$

2. Notons Z_i la variable égale à 1 si l'employé i ne recrute personne, et à 0 sinon. Alors $N=Z_1+\cdots+Z_n$ et, par linéarité :

$$E(N)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n-1}=\frac{1}{n-1}\times\frac{(n-1)n}{2}=\boxed{\frac{n}{2}}$$

Vérification : pour $n = 3$, l'employé 3 est recruté par l'employé 1 ou par l'employé 2, avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Dans le premier cas, les employés 2 et 3 ne recrutent personne ($N = 2$) ; dans le second, seul l'employé 3 ne recrute personne ($N = 1$). D'où $E(N) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$, conformément à la formule. Une simulation pour $n = 10$ donne une moyenne de 4,999, contre 5 attendu.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆⋆

1. La variable X_i suit une loi de Bernoulli ; il reste à calculer $P(X_i = 1)$. On dénombre les listes présentant un record en i, c'est-à-dire telles que $\sigma(i)$ soit le plus grand des i premiers termes :

- on choisit l'ensemble des valeurs occupant les i premières places : $\binom{n}{i}$ choix ;
- la plus grande de ces valeurs est placée en position i, et les $i-1$ autres sont rangées dans les positions 1 à $i-1$: $(i-1)!$ choix ;
- les $n-i$ valeurs restantes sont rangées dans les positions suivantes : $(n-i)!$ choix.

Il y a donc $\binom{n}{i}(i-1)!\,(n-i)! = \frac{n!}{i}$ listes favorables, d'où :

$$\boxed{P(X_i = 1) = \frac{1}{i} \qquad \text{et} \qquad P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{i}}$$

Ce résultat se comprend sans calcul : parmi les i premiers termes, le plus grand occupe n'importe laquelle des i positions avec la même probabilité.

2. Par linéarité, puisque $N = X_1 + \cdots + X_n$:

$$\boxed{E(N) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n}$$

Interprétation : on retrouve le nombre harmonique H_n de l'exercice 37 du chapitre 6, qui croît comme $\ln(n)$. Si l'on note pendant un siècle la température maximale de chaque année, sous l'hypothèse que le climat ne change pas, on n'attend en moyenne que $H_{100} \approx 5{,}19$ records : en observer beaucoup plus est un indice que l'hypothèse est fausse. Pour $n = 8$, une simulation de 50 000 listes donne 2,720 records en moyenne, contre $H_8 \approx 2{,}718$.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆⋆

1. À l'instant n, si la première boîte contient k boules, la boule tirée s'y trouve avec la probabilité $\frac{k}{a}$, et elle en sort : $Y_n = -1$; sinon, avec la probabilité $\frac{a-k}{a}$, une boule y entre : $Y_n = 1$. La formule des probabilités totales (chapitre 2), appliquée avec les événements $(X_n = k)$, donne :

$$P(Y_n = -1) = \sum_{k=0}^{a} P(X_n = k) \times \frac{k}{a} = \frac{E(X_n)}{a} \qquad \text{et} \qquad P(Y_n = 1) = 1 - \frac{E(X_n)}{a}$$

$$\boxed{E(Y_n) = 1 \times \left(1 - \frac{E(X_n)}{a}\right) - 1 \times \frac{E(X_n)}{a} = 1 - \frac{2}{a}\,E(X_n)}$$

Comme $X_{n+1} = X_n + Y_n$, la linéarité de l'espérance donne :

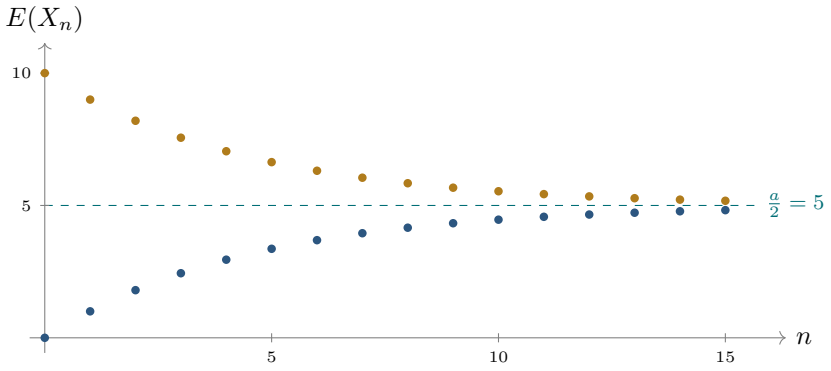
$$\boxed{E(X_{n+1}) = E(X_n) + 1 - \frac{2}{a}\,E(X_n) = \left(1 - \frac{2}{a}\right) E(X_n) + 1}$$

2. La suite $u_n = E(X_n)$ est arithmético-géométrique, comme à l'exercice 32 du chapitre 8. Son point fixe vérifie $\ell = \left(1 - \frac{2}{a}\right)\ell + 1$, soit $\ell = \frac{a}{2}$, et $u_n - \frac{a}{2}$ est géométrique de raison $1 - \frac{2}{a}$:

$$\boxed{E(X_n) = \frac{a}{2} + \left(1 - \frac{2}{a}\right)^n \left(E(X_0) - \frac{a}{2}\right)}$$

Comme $a \geqslant 2$, on a $0 \leqslant 1 - \frac{2}{a} < 1$, et :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \frac{a}{2}}$$



Pour $a = 10$, cette figure montre la suite $E(X_n)$ partant de $X_0 = 0$ (en bleu ardoise) et de $X_0 = 10$ (en ocre) : dans les deux cas, elle se rapproche géométriquement de 5.

Interprétation : quelle que soit la répartition initiale, les boules finissent en moyenne par se répartir également entre les deux boîtes. Les époux Ehrenfest ont imaginé ce modèle au début du XX$^{\text{e}}$ siècle pour comprendre comment un gaz, enfermé d'abord dans une moitié d'un récipient, finit par l'occuper uniformément, bien que chaque molécule se déplace au hasard.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆⋆

1. Notons U le nombre de pas en avant parmi les n premiers. Alors $S_n = U - (n - U) = 2U - n$, avec $0 \leqslant U \leqslant n$. Donc $-n \leqslant S_n \leqslant n$, et $S_n - n = 2(U - n)$ est pair : $\boxed{S_n \text{ a la parité de } n \text{ et } |S_n| \leqslant n.}$

2. Le nombre U de pas en avant compte les succès de 2ℓ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p : il suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2\ell\,;p)$. Or $S_{2\ell} = 2j \iff 2U - 2\ell = 2j \iff U = \ell + j$, d'où :

$$\boxed{P(S_{2\ell} = 2j) = \binom{2\ell}{\ell + j} p^{\ell+j} q^{\ell-j}}$$

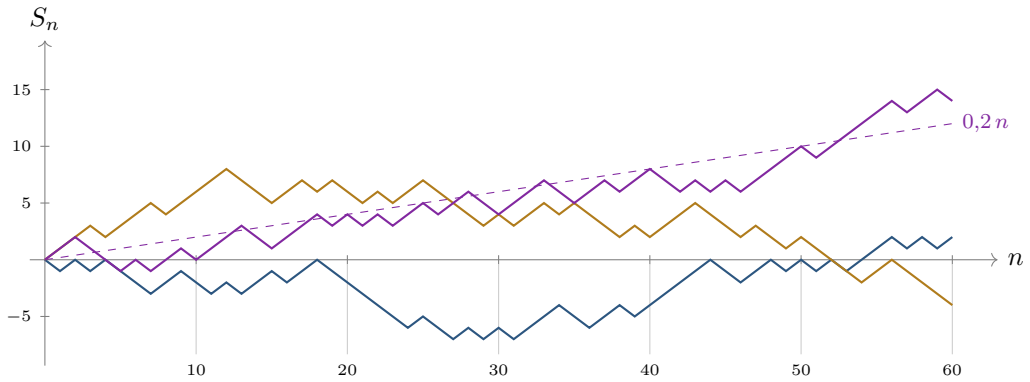
3. Pour $j = 0$, $P(S_{2\ell} = 0) = \binom{2\ell}{\ell}(pq)^\ell$, qui est maximal lorsque $pq = p(1-p)$ l'est. Ce trinôme atteint son maximum $\frac{1}{4}$ en $\boxed{p = \dfrac{1}{2}}$.

4. D'après l'exercice 34 du chapitre 7, $\binom{2\ell}{\ell} \leqslant 2^{2\ell} = 4^\ell$. Donc :

$$\boxed{P(S_{2\ell} = 0) \leqslant 4^\ell (pq)^\ell = (4pq)^\ell}$$

5. On a $1 - 4pq = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2 > 0$ si $p \neq q$, c'est-à-dire si $p \neq \frac{1}{2}$. Donc $0 < 4pq < 1$, et $(4pq)^\ell \to 0$ comme suite géométrique. Le théorème des gendarmes donne $\boxed{P(S_{2\ell} = 0) \to 0}$.

6. Pour $p = \frac{1}{2}$, la majoration précédente ne donne plus que 1. Mais $P(S_{2\ell} = 0) = \binom{2\ell}{\ell}\frac{1}{4^\ell} = \frac{1\times3\times\cdots\times(2\ell-1)}{2\times4\times\cdots\times(2\ell)}$ (exercice 42 du chapitre 9, question 3). Notons $A_\ell = \frac{2\times4\times\cdots\times(2\ell)}{3\times5\times\cdots\times(2\ell-1)}$, de sorte que $P(S_{2\ell} = 0) = \frac{1}{A_\ell}$. La question 7 de cet exercice donne $\frac{A_\ell^2}{2\ell+1} \to \frac{\pi}{2}$, donc $A_\ell^2 \to +\infty$, puis $A_\ell \to +\infty$ et $\boxed{P(S_{2\ell} = 0) \to 0}$. Plus précisément, $P(S_{2\ell} = 0)$ est proche de $\frac{1}{\sqrt{\pi\ell}}$: pour $\ell = 50$, on trouve 0,0796 contre $\frac{1}{\sqrt{50\pi}} \approx 0{,}0798$.



Cette figure montre trois marches de 60 pas, obtenues par simulation : deux avec $p = \frac{1}{2}$ (en bleu ardoise et en ocre), qui oscillent autour de 0 et y reviennent, et une avec $p = 0{,}6$ (en violet), qui dérive vers le haut, autour de la droite d'équation $y = 0{,}2\,n$ représentant $E(S_n) = n(p - q)$.

Interprétation : lorsque $p \neq \frac{1}{2}$, la marche dérive et la probabilité d'être en 0 décroît géométriquement. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, elle décroît beaucoup plus lentement, comme $\frac{1}{\sqrt{\ell}}$: la marche reste près de 0 à l'échelle $\sqrt{n}$, comme l'annonçait l'exercice 37, sans être exactement en 0 à un instant donné.