EXERCICES – CHAPITRE 10

LOI DES GRANDS NOMBRES

Échantillon d'une variable aléatoire

EXERCICE 1 ⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 12$ et de variance $\sigma^2 = 9$. Pour chacune des tailles n proposées, on considère un échantillon $(X_1 ; \dots ; X_n)$ de la loi de X.

Calculer $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(M_n)$ et $V(M_n)$ pour :

1. $n = 4$
2. $n = 25$
3. $n = 100$
4. $n = 900$

EXERCICE 2 ⋆

On lance un dé équilibré à six faces et on note X le numéro obtenu.

1. Déterminer $E(X)$ puis $V(X)$ sous forme de fraction irréductible.
2. On effectue 12 lancers. Calculer $E(S_{12})$, $V(S_{12})$, $E(M_{12})$ et $V(M_{12})$.
3. Reprendre la question précédente pour 1000 lancers, en arrondissant $V(M_{1000})$ à 10^{-4}.

EXERCICE 3 ⋆

Une urne contient des boules dont 30 % sont rouges. On y effectue 50 tirages avec remise et, pour chaque tirage, on pose $X_i = 1$ si la boule est rouge et $X_i = 0$ sinon.

1. Justifier que $(X_1 ; \dots ; X_{50})$ est un échantillon de taille 50 de la loi de Bernoulli de paramètre 0,3.
2. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
3. En déduire $E(S_{50})$, $V(S_{50})$, $E(M_{50})$ et $V(M_{50})$.
4. Quelle loi suit la variable S_{50} ? Vérifier que les résultats de la question précédente sont cohérents avec les formules du chapitre 2.
5. Que représente concrètement la variable M_{50} ?

EXERCICE 4 ⋆

Dans chaque cas, $(X_1 ; \dots ; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi d'une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance σ^2. Déterminer la quantité demandée.

1. $n = 30$ et $E(S_{30}) = 210$: déterminer μ.
2. $n = 12$ et $V(S_{12}) = 48$: déterminer σ^2.
3. $\sigma^2 = 20$ et $V(M_n) = 0{,}05$: déterminer n.
4. $\sigma = 4$ et l'écart-type de M_n vaut 0,2 : déterminer n.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire de variance $\sigma^2 = 36$, et M_n la moyenne d'un échantillon de taille n de sa loi.

1. Calculer la variance puis l'écart-type de M_n pour $n = 9$, $n = 36$ et $n = 144$.
2. Par quel nombre faut-il multiplier n pour diviser par 3 l'écart-type de M_n ? Justifier.
3. Déterminer la plus petite taille d'échantillon pour laquelle l'écart-type de M_n est inférieur ou égal à 0,1.

EXERCICE 6 ⋆⋆

La loi de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On considère un échantillon de taille 25 de la loi de X. Calculer $E(M_{25})$ et l'écart-type de M_{25}.
3. Même question pour un échantillon de taille 100.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Une chaîne de production fabrique des pièces dont la masse, en grammes, est une variable aléatoire X d'espérance 250 et d'écart-type 4. On prélève au hasard 64 pièces, dont les masses forment un échantillon de la loi de X.

1. Calculer l'espérance et l'écart-type de la masse totale S_{64} des 64 pièces.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de la masse moyenne M_{64}.
3. Comparer les deux écarts-types obtenus et commenter.

Inégalité de Markov

EXERCICE 8 ⋆

Soit X une variable aléatoire ne prenant que des valeurs positives, d'espérance $E(X) = 6$. Majorer, à l'aide de l'inégalité de Markov, les probabilités suivantes :

1. $P(X \geqslant 8)$
2. $P(X \geqslant 12)$
3. $P(X \geqslant 30)$
4. $P(X \geqslant 60)$
5. $P(X \geqslant 100)$

EXERCICE 9 ⋆

Le temps de trajet T, en minutes, d'un automobiliste pour se rendre à son travail est une variable aléatoire positive d'espérance 25 minutes.

1. Majorer la probabilité que le trajet dure au moins 50 minutes, puis au moins 75 minutes, puis au moins 100 minutes.
2. L'automobiliste affirme : « je mets au moins une heure et quart dans plus d'un jour sur trois ». Ce propos est-il compatible avec la majoration obtenue ?

EXERCICE 10 ⋆

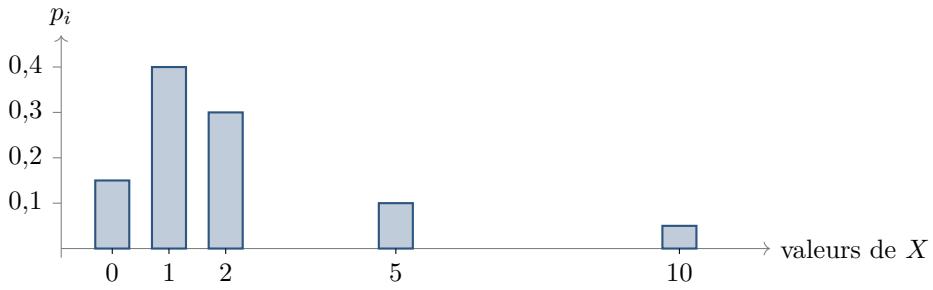
Soit X une variable aléatoire positive d'espérance 8.

1. Déterminer le plus petit réel a pour lequel l'inégalité de Markov garantit $P(X \geqslant a) \leqslant 0{,}05$.
2. Même question avec $P(X \geqslant a) \leqslant 0{,}01$.
3. Exprimer, en fonction de $E(X)$ et d'un réel α de $]0\,;1]$, le plus petit seuil a pour lequel l'inégalité de Markov garantit $P(X \geqslant a) \leqslant \alpha$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

La variable aléatoire X, à valeurs positives, a pour loi :

x_i	0	1	2	5	10
$P(X = x_i)$	0,15	0,4	0,3	0,1	0,05



1. Vérifier que $E(X) = 2$.
2. Calculer les valeurs exactes de $P(X \geqslant 5)$, $P(X \geqslant 10)$ et $P(X \geqslant 2)$.
3. Majorer ces trois probabilités par l'inégalité de Markov.
4. Comparer les résultats des deux questions précédentes, et préciser le cas où la majoration n'apporte aucune information.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Soit X une variable aléatoire positive d'espérance 5. Que donne l'inégalité de Markov pour le seuil $a = 4$? Cette information est-elle utile ?
2. Soit X une variable aléatoire positive d'espérance $\mu > 0$ et a un réel tel que $0 < a \leqslant \mu$. Démontrer que l'inégalité de Markov n'apporte alors jamais d'information.
3. La note X obtenue à un examen est une variable aléatoire à valeurs dans $[0\,;20]$, d'espérance 11. Un candidat affirme : « d'après l'inégalité de Markov, au plus la moitié des candidats ont obtenu au moins 12 ». Que penser de cette affirmation ?

EXERCICE 13 ⋆⋆

La température X, en degrés Celsius, relevée un jour donné dans une ville, est une variable aléatoire d'espérance 6. On sait de plus que cette température est toujours supérieure à $-20\,°\text{C}$.

1. Un élève écrit directement $P(X \geqslant 12) \leqslant \dfrac{6}{12} = 0{,}5$. Expliquer pourquoi ce raisonnement n'est pas valable.
2. On pose $Y = X + 20$. Justifier que Y est une variable aléatoire positive et calculer $E(Y)$.

3. Montrer que les événements $(X \geqslant 12)$ et $(Y \geqslant 32)$ sont identiques, puis majorer $P(X \geqslant 12)$.
4. Comparer cette majoration à celle qu'avait écrite l'élève.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

EXERCICE 14 ⋆

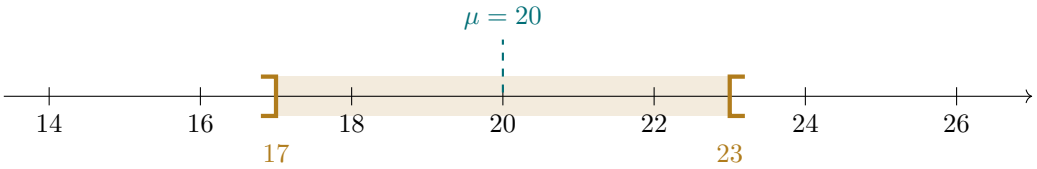
Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 50$ et de variance $\sigma^2 = 16$. Majorer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, les probabilités suivantes :

1. $P(|X - 50| \geqslant 8)$
2. $P(|X - 50| \geqslant 10)$
3. $P(|X - 50| \geqslant 20)$
4. $P(|X - 50| \geqslant 4)$

Préciser celle de ces quatre majorations qui n'apporte aucune information.

EXERCICE 15 ⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance 20 et d'écart-type 1,5.



1. Majorer $P(|X - 20| \geqslant 3)$.
2. En déduire une minoration de la probabilité que X appartienne à l'intervalle $]17\,;23[$.
3. Reprendre les deux questions précédentes avec l'intervalle $]15\,;25[$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance 60 et de variance 9.

1. Déterminer le plus petit réel $\delta > 0$ pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit $P(|X - 60| \geqslant \delta) \leqslant 0{,}04$.
2. Même question avec la majoration 0,01, puis donner l'intervalle correspondant.
3. Que devient ce seuil δ si l'on divise par 4 la variance de X, l'exigence 0,01 étant maintenue ?

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$, et soit k un entier naturel non nul.

1. Démontrer que $P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.
2. Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant les valeurs approchées à 10^{-3} près.

k	2	3	4	5
majorant de $P(\lvert X - \mu\rvert \geqslant k\sigma)$				
minorant de $P(\lvert X - \mu\rvert < k\sigma)$				

3. Compléter la phrase : « quelle que soit la loi de X, au moins … des valeurs se situent à moins de deux écarts-types de l'espérance ».
4. Que vaut le majorant pour $k = 1$? Commenter.

EXERCICE 18 ⋆⋆

On lance 10 fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de « pile » obtenus.

1. Donner la loi de X, puis son espérance et sa variance.
2. Majorer $P(|X - 5| \geqslant 3)$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Montrer que l'événement $(|X - 5| \geqslant 3)$ est la réunion des événements $(X \leqslant 2)$ et $(X \geqslant 8)$, puis calculer sa probabilité exacte.
4. Comparer les deux résultats et commenter.

EXERCICE 19 ⋆⋆

La variable aléatoire X prend les valeurs -1, 0 et 1 avec les probabilités respectives 0,1, 0,8 et 0,1.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Calculer la valeur exacte de $P(|X| \geqslant 1)$.
3. Majorer cette probabilité par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée avec $\delta = 1$. Que constate-t-on ?
4. Cet exemple permet-il d'améliorer l'inégalité du cours en remplaçant $\dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$ par une quantité plus petite ? Justifier.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Une machine remplit des sachets dont la masse X, en grammes, a pour espérance 500 et pour variance 4. Un sachet est déclaré conforme lorsque sa masse appartient à l'intervalle $]494\,;506[$.

1. Minorer la probabilité qu'un sachet prélevé au hasard soit conforme.
2. Le fabricant souhaite un intervalle $]500 - \delta\,;500 + \delta[$ contenant la masse d'un sachet avec une probabilité d'au moins 0,99. Déterminer la plus petite valeur de δ que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de garantir.
3. Commenter la largeur de l'intervalle obtenu.

Inégalité de concentration

EXERCICE 21 ⋆

Soit M_n la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $\sigma^2 = 4$. Majorer $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}5)$ pour :

1. $n = 100$
2. $n = 400$
3. $n = 1600$

Quelle taille d'échantillon faudrait-il pour que ce majorant soit divisé encore par 4 ?

EXERCICE 22 ⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance 9, et M_n la moyenne d'un échantillon de taille n de sa loi. On souhaite que M_n s'écarte de μ de moins de 0,3 avec une probabilité d'au moins 0,95.

1. Traduire cette exigence par une inégalité portant sur n.
2. Déterminer la plus petite taille d'échantillon convenable.
3. Vérifier le résultat en calculant le majorant obtenu pour cette valeur de n.

EXERCICE 23 ⋆⋆

On lance n fois un dé équilibré à six faces et on note M_n la moyenne des numéros obtenus. On rappelle que $\mu = 3{,}5$ et $\sigma^2 = \dfrac{35}{12}$.

1. Déterminer le nombre minimal de lancers pour que M_n s'écarte de 3,5 de moins de 0,05, avec une probabilité d'au moins 0,98.
2. Le cours établit qu'il suffit de 5834 lancers pour un écart inférieur à 0,1 avec une probabilité d'au moins 0,95. Expliquer, sans nouveau calcul, pourquoi le nombre trouvé à la question précédente est bien plus grand.

EXERCICE 24 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance 1. On veut garantir $P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant 0{,}05$.

1. Exprimer la plus petite taille d'échantillon convenable en fonction de δ.
2. Calculer cette taille pour $\delta = 1$, puis $\delta = 0{,}1$, puis $\delta = 0{,}01$.
3. Par quel nombre la taille de l'échantillon est-elle multipliée lorsqu'on divise δ par 10 ? Démontrer ce résultat dans le cas général.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

Dans une population, une proportion inconnue p d'individus possède un certain caractère. On interroge n personnes au hasard et, pour la i-ième d'entre elles, on pose $X_i = 1$ si elle possède ce caractère et $X_i = 0$ sinon. On admet que $(X_1 ; \ldots ; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p, et on note M_n la fréquence observée du caractère.

1. Donner l'espérance et la variance de X_1.
2. Démontrer que, pour tout réel p de $[0\,;1]$, on a $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
3. En déduire que, pour tout réel $\delta > 0$:

$$P\big(|M_n - p| \geqslant \delta\big) \;\leqslant\; \frac{1}{4n\delta^2}$$

4. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour que la fréquence observée s'écarte de p de moins de 3 points de pourcentage, avec une probabilité d'au moins 0,95.
5. Cette réponse dépend-elle de p ? Commenter l'intérêt de la majoration de la question 2.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

Une usine produit des tiges métalliques dont la longueur X, en centimètres, est une variable aléatoire d'espérance 20 et d'écart-type 0,5. On prélève au hasard 100 tiges, dont les longueurs forment un échantillon de la loi de X, et on note M_{100} la longueur moyenne de ces 100 tiges.

1. Calculer $E(M_{100})$ et $V(M_{100})$.
2. Majorer $P(|M_{100} - 20| \geqslant 0{,}1)$.
3. En déduire une minoration de la probabilité que la longueur moyenne de l'échantillon appartienne à l'intervalle $]19{,}9\,;20{,}1[$.
4. Le service qualité veut ramener à 0,01 le risque que la longueur moyenne s'écarte d'au moins 0,1 de 20. Combien de tiges doit-il prélever ?
5. Un technicien propose plutôt de régler la machine de façon à diviser par 5 l'écart-type de X, en conservant 100 tiges. Cette solution répond-elle à l'exigence du service qualité ?

Loi faible des grands nombres

EXERCICE 27 ⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance 5, et M_n la moyenne d'un échantillon de taille n de sa loi. On fixe $\delta = 0{,}2$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}2) \leqslant \dfrac{125}{n}$.
2. Calculer ce majorant pour $n = 125$, $n = 1250$ et $n = 12\,500$.
3. Déterminer la limite de la suite de terme général $\dfrac{125}{n}$, puis conclure.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance 2, et M_n la moyenne d'un échantillon de taille n de sa loi.

1. Justifier l'encadrement suivant, valable pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}01) \leqslant \frac{20\,000}{n}$$

2. En déduire, en rédigeant soigneusement, la limite de $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}01)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Reprendre les deux questions précédentes en remplaçant 0,01 par un réel $\delta > 0$ quelconque.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Quatre élèves commentent la loi faible des grands nombres. Pour chacun, dire si son affirmation est correcte et justifier.

- **Alice :** « à partir d'un certain rang, la moyenne M_n est égale à μ ».
- **Bruno :** « la probabilité que M_n s'écarte de μ d'au moins 0,01 peut être rendue aussi petite que l'on veut, à condition de prendre n assez grand ».
- **Chloé :** « le théorème ne s'applique plus si l'on choisit $\delta = 0{,}0001$ ».
- **Dorian :** « puisque le majorant $\dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$ décroît, la probabilité $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta)$ décroît elle aussi ».

EXERCICE 30 ⋆⋆

On lance n fois un dé équilibré à six faces. Pour chaque lancer, on pose $X_i = 1$ si le résultat est un 6, et $X_i = 0$ sinon. La variable M_n est alors la fréquence d'apparition du 6 au cours des n lancers.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X_1.
2. Écrire l'inégalité de concentration vérifiée par M_n pour un réel $\delta > 0$.
3. En déduire la limite de $P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \delta\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$, et interpréter ce résultat.
4. Déterminer le nombre minimal de lancers pour que la fréquence du 6 s'écarte de $\frac{1}{6}$ de moins de 0,01, avec une probabilité d'au moins 0,95.

Exercices de synthèse

EXERCICE 31 : QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La recopier sur la copie et la justifier.

Énoncé	**a**	**b**	**c**
1. X a pour variance 100. La variance de M_{25} vaut :	4	2	100
2. X a pour espérance 40. Alors $E(S_{10})$ vaut :	4	40	400
3. X est positive d'espérance 3. L'inégalité de Markov majore $P(X \geqslant 15)$ par :	0,2	5	0,6
4. X a pour espérance 10 et pour variance 4. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev majore $P(\lvert X-10\rvert \geqslant 5)$ par :	0,8	0,16	0,4
5. Pour diviser par 2 l'écart-type de M_n, il faut multiplier n par :	2	4	8
6. Avec $\sigma^2 = 12$, $\delta = 0{,}2$ et $n = 300$, le majorant de l'inégalité de concentration vaut :	0,2	0,5	1
7. L'inégalité de Markov s'applique à toute variable aléatoire :	positive	d'espérance nulle	suivant une loi binomiale
8. Pour $\delta > 0$ fixé, la limite de $P(\lvert M_n - \mu\rvert \geqslant \delta)$ lorsque n tend vers $+\infty$ vaut :	0	μ	δ
9. Avec $\sigma^2 = 1$ et $\delta = 0{,}1$, la plus petite taille d'échantillon donnant un majorant inférieur ou égal à 0,01 est :	1 000	10 000	100 000
10. X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2. Alors $V(M_{400})$ vaut :	0,16	0,0004	0,04

EXERCICE 32 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Dans tout l'exercice, $(X_1 ; \ldots ; X_n)$ désigne un échantillon de taille n de la loi d'une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance σ^2.

1. L'espérance de M_n est égale à μ, quelle que soit la taille de l'échantillon.
2. La variance de S_n est égale à $\dfrac{\sigma^2}{n}$.
3. Si l'on multiplie n par 4, l'écart-type de M_n est divisé par 2.
4. L'inégalité de Markov s'applique à toute variable aléatoire d'espérance strictement positive.
5. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut fournir un majorant supérieur à 1.
6. L'inégalité de concentration affirme que M_n finit par être égale à μ.
7. Quelle que soit la loi de X, on a $P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$.
8. La loi faible des grands nombres est un énoncé portant sur la limite d'une suite de probabilités.
9. Augmenter n de 10 % divise par 10 le majorant de l'inégalité de concentration.
10. Les variables aléatoires d'un échantillon sont indépendantes et suivent toutes la même loi.

EXERCICE 33 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

Un jeu se déroule ainsi : le joueur lance un dé équilibré à six faces. S'il obtient un 6, il gagne 5 € ; sinon, il perd 1 €. On note X le gain algébrique, en euros, du joueur à l'issue d'une partie.

Partie A

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$. Le jeu est-il équitable ?
3. Calculer $V(X)$.

Partie B

Un joueur enchaîne 100 parties indépendantes. On note S_{100} son gain total et M_{100} son gain moyen par partie.

1. Calculer $E(S_{100})$, $V(S_{100})$, $E(M_{100})$ et $V(M_{100})$.
2. Majorer $P(|M_{100}| \geqslant 0{,}5)$.
3. En déduire une majoration de la probabilité que le gain total du joueur dépasse 50 € en valeur absolue.

Partie C

1. Déterminer le nombre minimal de parties pour que le gain moyen s'écarte de 0 de moins de 0,1 €, avec une probabilité d'au moins 0,95.
2. Que dit la loi faible des grands nombres à propos de ce jeu ? Rédiger la conclusion en une phrase à l'attention d'un joueur qui espère s'enrichir.

EXERCICE 34 - TYPE BAC ⋆⋆⋆

On souhaite obtenir une valeur approchée du nombre π sans jamais le calculer. Pour cela, on choisit au hasard un point dans le carré de sommets $(0\,;0)$, $(1\,;0)$, $(1\,;1)$ et $(0\,;1)$, et on pose $X = 1$ si ce point appartient au quart de disque de centre $(0\,;0)$ et de rayon 1, et $X = 0$ sinon. On admet que la probabilité que le point appartienne à une partie du carré est égale à l'aire de cette partie.

On répète l'expérience n fois de façon indépendante et on note M_n la fréquence des points tombés dans le quart de disque.

1. Justifier que $E(X) = \dfrac{\pi}{4}$, et exprimer $V(X)$ en fonction de π.
2. Démontrer que $V(X) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
3. En déduire que, pour tout réel $\delta > 0$:

$$P\left(\left|M_n - \frac{\pi}{4}\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

4. On pose $Y_n = 4M_n$, valeur approchée de π fournie par la simulation. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, les événements $(|Y_n - \pi| \geqslant \varepsilon)$ et $\left(\left|M_n - \dfrac{\pi}{4}\right| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$ sont identiques, puis établir :

$$P(|Y_n - \pi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{4}{n\varepsilon^2}$$

5. Déterminer le nombre minimal de tirages pour que Y_n donne π à 0,01 près, avec une probabilité d'au moins 0,99.
6. Commenter ce résultat du point de vue de l'efficacité de la méthode.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Une compagnie d'assurance propose un contrat pour lequel le coût annuel X supporté par la compagnie, en euros, vaut 0 avec la probabilité 0,95 et 4 000 avec la probabilité 0,05.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. La compagnie détient 10 000 contrats, dont les coûts forment un échantillon de la loi de X. Calculer l'espérance et la variance du coût moyen $M_{10\,000}$ par contrat.
3. La prime annuelle demandée à chaque client est de 250 €. Montrer que la compagnie est déficitaire lorsque $M_{10\,000}$ dépasse 250, puis majorer la probabilité de cet événement.
4. Combien de contrats la compagnie doit-elle détenir pour que cette probabilité soit majorée par 0,01 ?
5. Expliquer, à l'aide de la loi faible des grands nombres, pourquoi une compagnie d'assurance peut prévoir avec précision son coût total sans savoir prévoir le coût d'un contrat particulier.

Pour aller plus loin

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et n la plus grande valeur que prend X.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier la relation $P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1)$.
2. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$$

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Soient X une variable aléatoire, $n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1 ; \ldots ; X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de X. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Exprimer $E(S_n)$ en fonction de n et de $E(X)$.
2. Exprimer $E(S_n^2)$ en fonction de n, $E(X)$ et $E(X^2)$.

3. On suppose $E(X) = 0$. Montrer, en appliquant l'inégalité de Markov à S_n^2, que pour tout réel $a > 0$:
$$P(|S_n| \geqslant a\sqrt{n}) \leqslant \frac{E(X^2)}{a^2}$$
4. On revient au cas général. En considérant $Y = X - E(X)$, montrer que pour tout réel $a > 0$:
$$P(|S_n - nE(X)| \geqslant a\sqrt{n}) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆⋆

Nombre de points fixes d'une permutation. On se donne n boules numérotées de 1 à n, et n urnes également numérotées de 1 à n. On place une boule dans chaque urne, toutes les répartitions étant équiprobables. Quelle est l'espérance du nombre de boules placées dans l'urne portant leur numéro ? Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on introduira la variable aléatoire X_i égale à 1 si la boule i est placée dans l'urne i, et à 0 sinon.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆⋆

On considère une assemblée de n personnes, et l'on ignore les années bissextiles. On suppose les dates d'anniversaire des personnes indépendantes, chaque date étant équiprobable. Quelle est l'espérance du nombre de paires de personnes ayant le même anniversaire ? Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on introduira la variable aléatoire $X_{i,j}$ égale à 1 si les personnes i et j ont le même anniversaire, et à 0 sinon.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une entreprise suit la stratégie suivante pour recruter ses n employés. L'employé 1 fonde l'entreprise et recrute l'employé 2 ; l'un des deux employés 1 et 2 recrute l'employé 3 ; l'un des trois employés 1, 2 et 3 recrute l'employé 4, et ainsi de suite. On suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, chacun des employés 1, …, i a la même probabilité de recruter l'employé $i+1$, les choix successifs étant indépendants.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, quelle est la probabilité que l'employé i ne recrute personne ?
2. Soit N le nombre d'employés n'ayant recruté personne. Calculer $E(N)$.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆⋆

Nombre de records d'une permutation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On range au hasard les entiers 1, 2, …, n dans une liste $(\sigma(1) ; \sigma(2) ; \ldots ; \sigma(n))$, les $n!$ rangements possibles étant équiprobables. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on dit que la liste présente un *record* en i si $\sigma(i)$ est strictement supérieur aux $i-1$ entiers $\sigma(1)$, …, $\sigma(i-1)$.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit X_i la variable aléatoire égale à 1 si la liste présente un record en i, et à 0 sinon. Déterminer la loi de X_i.
2. Soit N le nombre de records de la liste. Calculer $E(N)$.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆⋆

Urne d'Ehrenfest. On fixe un entier $a \geqslant 2$, et l'on se donne a boules numérotées de 1 à a, réparties dans deux boîtes. À chaque seconde à partir de l'instant 0, on choisit au hasard un entier de $\{1 ; \ldots ; a\}$, tous étant équiprobables, et l'on déplace la boule portant ce numéro d'une boîte dans l'autre. Les tirages effectués à des instants distincts sont supposés indépendants. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dans la première boîte à l'instant n, et $Y_n = X_{n+1} - X_n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$E(Y_n) = 1 - \frac{2}{a}E(X_n) \qquad \text{et} \qquad E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{2}{a}\right)E(X_n) + 1$$

2. En utilisant la méthode d'étude des suites arithmético-géométriques, exprimer $E(X_n)$ en fonction de $E(X_0)$, a et n. Déterminer la limite de la suite $(E(X_n))$. Comment expliquer ce résultat ?

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆⋆

Marches aléatoires. Soient $p \in]0\,;1[$, $q = 1-p$, et X_1, X_2, …, des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout k, $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = q$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$: c'est la position, après n pas, d'une particule qui part de 0 et fait à chaque instant un pas en avant ou en arrière.

1. Montrer que S_n est à valeurs dans l'ensemble des entiers relatifs de valeur absolue inférieure ou égale à n et de même parité que n.
2. On suppose n pair : $n = 2\ell$, avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la loi de $S_{2\ell}$ est donnée par
$$P(S_{2\ell} = 2j) = \binom{2\ell}{\ell+j} p^{\ell+j} q^{\ell-j} \qquad \text{pour } j \in \{-\ell\,;\ldots\,;\ell\}$$
3. Pour quelle valeur de p la probabilité $P(S_{2\ell} = 0)$ est-elle maximale ?
4. Montrer que $P(S_{2\ell} = 0) \leqslant (4pq)^\ell$.
5. On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $4pq < 1$, puis que $P(S_{2\ell} = 0)$ tend vers 0 lorsque ℓ tend vers $+\infty$.
6. On suppose $p = \dfrac{1}{2}$. En utilisant l'exercice 42 du chapitre 9, montrer que $P(S_{2\ell} = 0)$ tend encore vers 0.