FORMULAIRE · FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Dans toute la page, a, b, p, q, x sont des réels et $n \in \mathbb{N}$. **MPSI · MP**

DÉFINITIONS ET RELATIONS FONDAMENTALES

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

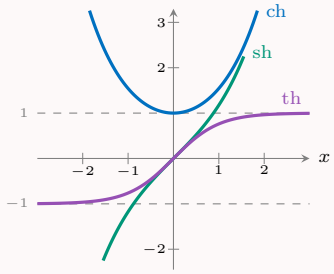
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \mathrm{e}^{\pm x} = \operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx) \qquad \operatorname{ch} x \geqslant 1, \quad -1 < \operatorname{th} x < 1$$

ch → paire sh → impaire th → impaire

COURBES



DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \qquad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \qquad \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} \qquad \int \operatorname{th} x \, \mathrm{d}x = \ln(\operatorname{ch} x)$$

$$\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \, \mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sh} x| \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x} = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| \quad (|x| > 1)$$

ADDITION, ANGLE DOUBLE, ANGLE MOITIÉ ET LINÉARISATION

$$\operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a \pm b) = \frac{\operatorname{th} a \pm \operatorname{th} b}{1 \pm \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2} \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}$$

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \qquad \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

Avec $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$: $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{1+\operatorname{ch}(2x)}$.

PRODUITS, SOMMES ET DIFFÉRENCES

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\big) \qquad \operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch}\frac{p+q}{2}\operatorname{ch}\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\big) \qquad \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2}\operatorname{sh}\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\big) \qquad \operatorname{sh} p \pm \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\frac{p \pm q}{2}\operatorname{ch}\frac{p \mp q}{2}$$

$$\operatorname{th} p \pm \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p \pm q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$$

Règle d'Osborn (1902). Une formule de trigonométrie circulaire devient la formule hyperbolique correspondante en remplaçant cos par ch et sin par sh, et en changeant le signe de chaque produit de deux sinus : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ devient $\operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$.

INÉGALITÉS, LIMITES ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS EN 0

$$\operatorname{ch} x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2} \qquad |\operatorname{sh} x| \geqslant |x| \qquad |\operatorname{th} x| \leqslant \min(1, |x|) \qquad \operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big) \qquad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o\big(x^8\big) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Hors programme : les réciproques Argsh, Argch et Argth sont les primitives $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ (sur $[1, +\infty[$) et $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ (sur $]-1, 1[$) de $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ et $\frac{1}{1-x^2}$.